УДК 533.932

Поддержание синхронизма частицы с электромагнитной волной с помощью электростатического поля

В. П. Милантьев, Я. Н. Шаар, С. П. Карнилович

Кафедра экспериментальной физики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Аналитически и численно показано, что возможно эффективное ускорение частицы замедленной электромагнитной волной на небольшом интервале в режиме циклотронного авторезонанса, поддерживаемого с помощью синхронизирующего электростатического поля. Показано, что в сопутствующей системе отсчёта, движущейся со скоростью электрического дрейфа, возникают новые резонансные явления, связанные с эффектами конечного гирорадиуса частицы. Отмечается, что в случае достаточно большой скорости электрического дрейфа усреднение уравнений движения частицы в сопутствующей системе становится неприменимым.

Ключевые слова: заряженная частица, релятивистское движение, электромагнитная волна, циклотронный авторезонанс, электрический дрейф, конечный гирорадиус частицы.

1. Введение

Как известно, ускорение заряженных частиц электромагнитной волной, распространяющейся вдоль постоянного магнитного поля, в режиме циклотронного авторезонанса возможно лишь в случае вакуумной волны, когда её скорость равна скорости света [1–3]. Условие циклотронного резонанса частицы с волной определяется, в общем, соотношением:

$$\gamma - NP_z = \Omega. \tag{1}$$

Здесь $N = kc/\omega$ — показатель преломления (отношение скорости света к фазовой скорости волны), $\Omega = eB_0/mc\omega$ — отношение классической гирочастоты к частоте волны ω, γ — релятивистский фактор, $P = p/mc$ — безразмерный вектор импульса частицы. Предполагается, что ведущее постоянное магнитное поле B_0 направлено вдоль оси z, электромагнитная волна распространяется в том же направлении и имеет, в общем, эллиптическую поляризацию:

$$\vec{E}_1 = (E_1 \cos\vartheta,\, E_2 \sin\vartheta,\, 0)\,, \quad \vec{B}_1 = (-NE_2 \sin\vartheta,\, NE_1 \cos\vartheta,\, 0)\,. \tag{2}$$

Здесь E_1, E_2 — амплитуды волны, ϑ — её фаза, описываемая уравнением

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau} = -1 + \frac{NP_z}{\gamma}. \tag{3}$$

$\tau = \omega t$ — безразмерное время.

Условие циклотронного резонанса (1) совпадает с интегралом уравнений движения частицы

$$N\gamma - P_z = Y = \mathrm{const} \tag{4}$$

только при $N = 1$, то есть, когда фазовая скорость волны равна скорости света. Это есть авторезонанс [1, 2]. Если показатель N не равен 1, то начальное условие циклотронного резонанса частицы с волной нарушается, и авторезонансный режим движения частицы не возможен. Однако условие (1), определяющее

Работа (частично) проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России на 2009-2012 г.», а также поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 10-02-01302).

фазовый синхронизм частицы с волной, в случае замедленной или ускоренной электромагнитной волны может быть поддержано с помощью варьирования её фазовой скорости (изменения N), профилирования магнитного поля (изменения Ω в пространстве или со временем), включения электростатического поля вдоль или поперёк внешнего магнитного поля и пр. [3]. В работе [4] было показано, что с помощью синхронизирующего электростатического поля, скрещенного с ведущим магнитным полем, можно обеспечить достаточно эффективное ускорение частиц. Условия поддержания синхронизма при движении частицы зависят от поляризации ускоряющей электромагнитной волны, её фазовой скорости и, в общем, от амплитуды. Эффективность ускорения может быть повышена с помощью включения помимо поперечной также продольной составляющей электростатического поля по отношению к ведущему магнитному полю [5]. Данная статья посвящена детальному исследованию возможности ускорения заряженных частиц замедленной электромагнитной волной в синхронном режиме, поддерживаемом с помощью электростатического поля, имеющего как продольную, так и поперечную составляющие. Рассматриваются возможные резонансы, возникающие при учёте эффектов конечного гирорадиуса частицы в сопутствующей системе, движущейся со скоростью электрического дрейфа. Проведено численное решение, которое подтверждает аналитические оценки возможности эффективного ускорения частиц в рассматриваемых условиях. Отмечаются ограничения метода усреднения в применении к уравнениям движения частицы в сопутствующей системе.

2. Уравнения движения частицы

Если фазовая скорость электромагнитной волны, распространяющейся вдоль постоянного магнитного поля, отличается от скорости света, то начальное условие циклотронного резонанса (1) не может «само собой» сохраняться во все время движения частицы, поскольку оно не согласуется с интегралом (4). Для поддержания условия (1) будем использовать синхронизирующее электростатическое поле, которое имеет продольную и поперечную составляющие по отношению к ведущему магнитному полю:

$$\vec{E}_0 = (0, E_{02}, E_{03})\,. \tag{5}$$

Чтобы выделить циклотронное вращение частицы, перейдём в систему отсчёта Σ', движущуюся вдоль оси x со скоростью V относительно лабораторной системы Σ. Согласно формулам преобразования векторов электромагнитного поля [6], в сопутствующей системе отсчёта Σ' имеем:

$$E'_{0x} = E_{0x} = 0, \quad E'_{02} = (E_{02} - VB_0)\,\Gamma, \quad E'_{03} = E_{03}\Gamma. \tag{6}$$

$$B'_{0x} = 0; \quad B'_{0y} = \Gamma V E_{03}; \quad B'_{0z} = \frac{B_0}{\Gamma}. \tag{7}$$

В этих формулах релятивистский множитель $\Gamma = \left(1 - V^2\right)^{-1/2}$.

Скорость V (в единицах скорости света) выбирается так, чтобы в системе Σ' электрическое поле E'_{02} отсутствовало. Из формул (6) следует, что в этом случае скорость V должна быть равна скорости электрического дрейфа:

$$V = \frac{E_{02}}{B_0}. \tag{8}$$

При этом необходимо считать, что продольная составляющая электрического поля E_{03} является достаточно слабой, чтобы за время ускорения под действием этой составляющей частица успевала совершить достаточное количество циклотронных оборотов [7].

Параметры поля электромагнитной волны преобразуются по формулам:

$$\begin{gathered} E_1' = E_1, \quad B_1' = -NE_2, \\ E_2' = E_2\Gamma, \quad B_2' = \Gamma N E_1, \\ E_3' = V\Gamma N E_1. \quad B_3' = -V\Gamma E_2. \end{gathered} \tag{9}$$

$$\omega' = \Gamma\omega; \quad k_x' = -kV\Gamma/N; \quad k_y' = 0; \quad k_z' = k. \tag{10}$$

Из формул (10) видно, что в сопутствующей системе Σ' волна распространяется под углом к магнитному полю. При этом волна становится продольно-поперечной.

Запишем уравнения движения частицы в сопутствующей системе [6]:

$$\frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}s_1} = \frac{e}{m_0 c^2} F^{ik} w_k. \tag{11}$$

Здесь $w^i \equiv \left(w^0, w^1, w^2, w^3\right)$ — 4-вектор скорости, F^{ik} — тензор электромагнитного поля, $\mathrm{d}s_1 = cdt'/w^0$ — интервал.

К уравнениям (11) необходимо добавить уравнение для фазы волны:

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s_1} = -k^{i'} w_i. \tag{12}$$

Введём далее безразмерный интервал $\mathrm{d}s = \dfrac{\omega'}{c}\mathrm{d}s_1 = \dfrac{\Gamma\omega}{w^0}\mathrm{d}t'$ и безразмерные параметры напряжённостей электрического поля: $\varepsilon_{1,2} = \dfrac{eE_{1,2}}{\Gamma m_0 c\omega}$; $\varepsilon_{03} = \dfrac{eE_{03}}{\Gamma m_0 c\omega}$.

При не слишком больших значениях Γ (небольших значениях скорости электрического дрейфа) и не слишком большой интенсивности ускоряющей волны можно выделить циклотронное вращение частицы в сопутствующей системе Σ' с помощью формул:

$$w^1 = w_\perp \cos\vartheta_c, \quad w^2 = w_\perp \sin\vartheta_c,$$

где ϑ_c — фаза циклотронного вращения. В этом случае уравнения (11), (12) принимают вид:

$$\frac{\mathrm{d}w^0}{\mathrm{d}s} = \varepsilon_1 w_\perp \cos\vartheta\cos\vartheta_c + \Gamma\varepsilon_2 w_\perp \sin\vartheta\sin\vartheta_c + \Gamma\left(\varepsilon_{03} + VN\varepsilon_1\cos\vartheta\right) w^3, \tag{13}$$

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}w^3}{\mathrm{d}s} = \Gamma\left(\varepsilon_{03} + VN\varepsilon_1\cos\vartheta\right) w^0 + \Gamma\left(V\varepsilon_{03} + N\varepsilon_1\cos\vartheta\right) w_\perp\cos\vartheta_c + \\ + N\varepsilon_2 w_\perp \sin\vartheta\sin\vartheta_c, \end{split} \tag{14}$$

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}w_\perp}{\mathrm{d}s} = w^0\left(\varepsilon_1\cos\vartheta\cos\vartheta_c + \Gamma\varepsilon_2\sin\vartheta\sin\vartheta_c\right) - \Gamma V\varepsilon_{03} w^3\cos\vartheta_c - \\ - Nw^3\left(\Gamma\varepsilon_1\cos\vartheta\cos\vartheta_c + \varepsilon_2\sin\vartheta\sin\vartheta_c\right), \end{split} \tag{15}$$

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}\vartheta_c}{\mathrm{d}s} = -\frac{\Omega}{\Gamma^2} + \frac{w^0}{w_\perp}\left(\Gamma\varepsilon_2\sin\vartheta\cos\vartheta_c - \varepsilon_1\cos\vartheta\cos\vartheta_c\right) + \Gamma V\varepsilon_2\sin\vartheta + \\ + \frac{\Gamma V}{w_\perp}\varepsilon_{03} w^3\sin\vartheta_c + \frac{Nw^3}{w_\perp}\left(\Gamma\varepsilon_1\cos\vartheta\sin\vartheta_c - \varepsilon_2\sin\vartheta\cos\vartheta_c\right), \end{split} \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} = -w^0 + \frac{N}{\Gamma}w^3 - Vw_\perp\cos\vartheta_c. \tag{17}$$

При отсутствии продольного электрического поля уравнения (13)–(17) совпадают с уравнениями [4]. Последний член в уравнении (17) связан с тем, что в сопутствующей системе согласно формулам (10) возникает поперечная составляющая волнового вектора — k'_x. В работе [4] предполагалось, что эта составляющая является достаточно малой, так что гирорадиус частицы мал по сравнению с «поперечной» длиной волны.

Если гирорадиус частицы в сопутствующей системе не мал, то осциллирующий член в (17) становится большим. В этом случае необходимо от фазы волны ϑ перейти к новой фазе ψ по формуле [8]:

$$\vartheta = \psi - A\sin\vartheta_c. \tag{18}$$

Величина A подбирается таким образом, чтобы в уравнении для фазы ψ отсутствовал большой быстро осциллирующий член. Тогда

$$A = \frac{\Gamma^2 V}{\Omega}w_\perp. \tag{19}$$

Величина A может быть достаточно большой из-за малых значений величины Ω. Например, в световом диапазоне $\Omega \sim 10^{-5}$.

Учитывая формулу $e^{iA\sin\vartheta_c} = \sum\limits_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty} J_n(A)e^{in\vartheta_c}$, где $J_n(A)$ — функции Бесселя порядка n [9], а также рекуррентные соотношения

$$J_{n-1}(A) + J_{n+1}(A) = \frac{2nJ_n(A)}{A}, \quad J_{n-1}(A) - J_{n+1}(A) = 2\frac{\mathrm{d}J_n(A)}{\mathrm{d}A} \equiv 2J'_n(A),$$

приводим уравнения (13)–(17) к виду:

$$\frac{\mathrm{d}w^0}{\mathrm{d}s} = \varepsilon_1 \sum_{-\infty\leqslant q\leqslant\infty} J_q(A)\left(\frac{qw_\perp}{A} + \Gamma VNw^3\right)\cos\psi_q - \\ - \varepsilon_2\Gamma w_\perp\sum_q J'_q(A)\cos\psi_q + \Gamma\varepsilon_{03}w^3, \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}w^3}{\mathrm{d}s} = \varepsilon_1\Gamma N\sum_q J_q(A)\left(Vw^0 + \frac{qw_\perp}{A}\right)\cos\psi_q - \varepsilon_2 Nw_\perp\sum_q J'_q(A)\cos\psi_q + \\ + \Gamma\varepsilon_{03}\left(w^0 + Vw_\perp\cos\vartheta_c\right), \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_\perp}{\mathrm{d}s} = \varepsilon_1\left(w^0 - N\Gamma w^3\right)\sum_q \frac{qJ_q(A)}{A}\cos\psi_q - \varepsilon_2\left(\Gamma w^0 - Nw^3\right)\sum_q J'_q(A)\cos\psi_q - \\ - \Gamma V\varepsilon_{03}w^3\cos\vartheta_c, \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = -w^0 + \frac{N}{\Gamma}w^3 - \Gamma V\varepsilon_2\sum_q J_q(A)\left\{q + \frac{\Gamma^2}{\Omega}\left(w^0 - \frac{N}{\Gamma}w^3\right)\right\}\sin\psi_q, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_c}{\mathrm{d}s} = -\frac{\Omega}{\Gamma^2} + \frac{\varepsilon_1}{w_\perp}\left(\Gamma N w^3 - w^0\right)\sum_q J_q'(A)\sin\psi_q + \\ + \varepsilon_2 \sum_q J_q(A)\left\{\frac{q\left(\Gamma w^0 - N w^3\right)}{w_\perp} + \Gamma V\right\}\sin\psi_q + \frac{\Gamma V}{w_\perp}\varepsilon_{03} w^3 \sin\vartheta_c. \quad (24)$$

Здесь введено обозначение для комбинации фаз: $\psi_q \equiv \psi + q\vartheta_c$, где число $q = 0, \pm1, \pm2, ...$ При резонансе одна из комбинаций фаз ψ_q является медленной (или полубыстрой) переменной. Будем предполагать, что отдельные резонансы не перекрываются друг с другом. Тогда можно ввести резонансную фазу:

$$\psi_n = \psi - n\vartheta_c. \quad (25)$$

Числа $n = 1, 2, \ldots$, определяемые условиями задачи, являются фиксированными. Значение $n = 1$ соответствует циклотронному резонансу частицы с волной. При $n \geqslant 2$ возникают резонансы на гармониках гирочастоты.

После усреднения по всем быстрым фазам ϑ_c и ψ_q, кроме резонансной фазы ψ_n, получаем приближённую систему уравнений движения частицы в области изолированного резонанса с фазой (25):

$$\frac{\mathrm{d}w^0}{\mathrm{d}s} = (-1)^n \varepsilon_1 \left(\Gamma V N w^3 - \frac{n\Omega}{\Gamma^2 V}\right) J_n(A)\cos\psi_n + \\ + (-1)^{n+1}\varepsilon_2 \Gamma w_\perp J_n'(A)\cos\psi_n + \varepsilon_{03}\Gamma w^3, \quad (26)$$

$$\frac{\mathrm{d}w^3}{\mathrm{d}s} = (-1)^n \varepsilon_1 \Gamma N \left(V w^0 - \frac{n\Omega}{\Gamma^2 V}\right) J_n(A)\cos\psi_n + \\ + (-1)^{n+1}\varepsilon_2 \Gamma w_\perp J_n'(A)\cos\psi_n + \varepsilon_{03}\Gamma w^0, \quad (27)$$

$$\frac{\mathrm{d}w_\perp}{\mathrm{d}s} = (-1)^{n+1}\varepsilon_1 \frac{w^0 - \Gamma N w^3}{A} n J_n(A)\cos\psi_n + \\ + (-1)^{n+1}\varepsilon_2 \left(\Gamma w^0 - N w^3\right) J_n'(A)\cos\psi_n, \quad (28)$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\Gamma}\left(\Gamma w^0 - N w^3 - \frac{n\Omega}{\Gamma}\right) + (-1)^n \varepsilon_1 \frac{w^0 - \Gamma N w^3}{w_\perp} n J_n'(A)\sin\psi_n + \\ + (-1)^n \varepsilon_2 \frac{\Gamma w^0 - N w^3}{w_\perp}\left(A J_n'(A)\right)'\sin\psi_n. \quad (29)$$

Штрих означает производную по аргументу A.

Из уравнения (29) видно, что резонансной фазе (25) соответствует комбинация частот

$$\Gamma w^0 - N w^3 - n\frac{\Omega}{\Gamma} = 0. \quad (30)$$

Если в начальный момент времени это условие резонанса выполнено, то, в общем, оно не сохраняется во всё время движения частицы. Далее рассмотрим условия, при которых резонансное соотношение между частотами (30) может сохраняться со временем. Это будет соответствовать синхронному режиму движения частицы.

3. Поддержание синхронизма частицы с волной с помощью электростатического поля

Рассмотрим эволюцию комбинации $\Gamma w^0 - N w^3$, входящей в условие резонанса (30), а также величины $N w^0 - \Gamma w^3$. Из уравнений (26), (27) следует:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\Gamma w^0 - N w^3\right) = (-1)^n \Gamma \varepsilon_1 \left\{ NV\left(\Gamma w^3 - N w^0\right) - \frac{n\Omega}{\Gamma^2 V}\left(1 - N^2\right)\right\} J_n(A)\cos\psi_n - \\ - (-1)^n \left(\Gamma^2 - N^2\right)\varepsilon_2 w_\perp J_n'(A)\cos\psi_n + \Gamma\varepsilon_{03}\left(\Gamma w^3 - N w^0\right). \quad (31)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(N w^0 - \Gamma w^3\right) = -\Gamma\left(\Gamma w^0 - N w^3\right)\varepsilon_{03} - \\ - (-1)^n N\varepsilon_1 \left\{\Gamma V\left(\Gamma w^0 - N w^3\right) - \frac{n\Omega}{\Gamma^2 V}\left(1 - \Gamma^2\right)\right\} J_n(A)\cos\psi_n. \quad (32)$$

Резонансная комбинация частот (30) будет сохраняться со временем, если правая часть уравнения (31) обратится в нуль. Если продольное электростатическое поле отсутствует ($\varepsilon_{03} = 0$) и ускоряющая электромагнитная волна является линейно-поляризованной в направлении внешнего постоянного электрического поля ($\varepsilon_1 = 0,\ \ \varepsilon_2 \neq 0$), то в правой части (31) остаётся единственный член $\left(\Gamma^2 - N^2\right)\ \varepsilon_2 w_\perp J_n'(A)\cos\psi_n$. Отсюда следует, что синхронное движение частицы возможно при условии, что скорость электрического дрейфа определяется соотношением: $\Gamma = N > 1$. Это совпадает с условием, полученным в работе [4] в случае бесконечно малого гирорадиуса частицы при циклотронном резонансе ($n = 1$).

Если $\Gamma \neq N$, то при отсутствии продольного электростатического поля синхронный режим движения частицы в сопутствующей системе невозможен. Для обеспечения синхронизма необходимо подобрать продольное электростатическое поле ε_{03} так, чтобы правая часть (31) обращалась в нуль (при $\Gamma w^3 - N w^0 \neq 0$):

$$\varepsilon_{03} = (-1)^n \varepsilon_2 \frac{w_\perp\left(\Gamma^2 - N^2\right)}{\Gamma\left(\Gamma w^3 - N w^0\right)} J_n'(A)\cos\psi_n. \quad (33)$$

В этом случае резонансное условие (30) сохраняется со временем, а из уравнения (32) следует:

$$\varepsilon_{03} = -\frac{1}{n\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(N w^0 - \Gamma w^3\right). \quad (34)$$

Поле ε_{03} потенциально, то есть $\varepsilon_{03}(X'^3) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X'^3}$. Легко показать, что

$$U_n(X'^3) = \frac{N^2 - \Gamma^2}{2nN^2\Omega}\left(w^0 - w^0_0\right)\left\{\Gamma\left(w^0 + w^0_0\right) - \frac{2n\Omega}{\Gamma}\right\}. \quad (35)$$

Здесь w^0_0 — начальное значение энергии частицы. Аналогичное выражение в случае циклотронного резонанса ($n = 1$) в невакуумной волне ($N \neq 1$), при отсутствии электрического дрейфа ($\Gamma = 1$) было получено в работе [10].

Потенциал электростатического поля вида (35), в общем, вряд ли можно реализовать в эксперименте. Если же взять, например, потенциал с линейным профилем $U_n(X'^3) = 1 + \alpha X'^3$, где $\alpha = -\varepsilon_{03} = \mathrm{const}$, то нельзя рассчитывать на сохранение синхронизма частицы с волной во всё время движения. Пока расстройка частоты (и сдвиг фаз) незначительна, частица может набирать энергию в условиях, близких к синхронному режиму. Однако на некотором расстоянии сдвиг фаз становится значительным, и тогда происходит срыв резонанса. Можно найти оптимальный градиент потенциала (напряжённость постоянного электрического поля), при котором на интервале ускорения происходит максимальный набор энергии частицей [11].

4. Резонансы при конечном гирорадиусе частицы

Если электростатическое поле подобрано так, что условие резонанса (30) выполняется во всё время движения частицы, то из уравнений (28), (29) получаем:

$$\frac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}A} = \frac{\varepsilon_1\left(w^0 - \Gamma N w^3\right) n J_n'(A)\sin\psi_n + \varepsilon_2 \frac{n\Omega}{\Gamma}\left(AJ_n'\right)'\sin\psi_n}{\varepsilon_1\left(w^0 - \Gamma N w^3\right) n J_n(A)\cos\psi_n + \varepsilon_2 \frac{n\Omega}{\Gamma} AJ_n'(A)\cos\psi_n}. \tag{36}$$

Легко видеть, что в случае линейно-поляризованной волны $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$ уравнение (36) допускает интеграл:

$$AJ_n'(A)\sin\psi_n = \Phi_n \equiv \mathrm{const}. \tag{37}$$

В случае малого гирорадиуса ($A \ll 1$) при циклотронном резонансе ($n = 1$) интеграл (37) совпадает с результатом [4].

Из релятивистского соотношения $\left(w^0\right)^2 = 1 + \left(w^3\right)^2 + w_\perp^2$ и условия резонанса (30) следует:

$$\left(N^2 - \Gamma^2\right)\left(w^0\right)^2 + N\frac{n\Omega}{\Gamma}w^0 - \left(\frac{n\Omega}{\Gamma}\right)^2 = N^2\left(1 + w_\perp^2\right). \tag{38}$$

Далее с помощью уравнения (28) получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{A^2}{2} = (-1)^{n+1}\varepsilon_2\Gamma V n A J_n'(A)\cos\psi_n. \tag{39}$$

Используя интеграл (37), уравнение (39) можно привести к виду:

$$\frac{\mathrm{d}A^2}{\sqrt{\left(AJ_n'\right)^2 - \Phi_n}} = (-1)^{n+1} 2\varepsilon_2\Gamma V n \mathrm{d}s. \tag{40}$$

Предположим далее, что параметр $A = \dfrac{\Gamma^2 V}{\Omega} w_\perp \lesssim 1$. В этом случае $J_n'(A) \approx \dfrac{A^{n-1}}{2^n\,(n-1)\,!}$. Тогда уравнение (40) упрощается:

$$\frac{\mathrm{d}A^2}{\sqrt{A^{2n} - G_n}} = (-1)^{n+1}\frac{2n\varepsilon_2\Gamma V}{2^n\,(n-1)\,!}\mathrm{d}s. \tag{41}$$

Здесь введено обозначение: $G_n \equiv \Phi_n\left[2^n\,(n-1)\,!\right]^2$.

При циклотронном резонансе ($n = 1$) получаем решение:

$$\sqrt{A^2 - G_1} = \sqrt{A_0^2 - G_1} + \frac{\varepsilon_2\Gamma V}{2}\left(s - s_0\right), \tag{42}$$

где A_0 — значение параметра A при $s = s_0$.

В случае резонанса на второй гармонике гирочастоты ($n = 2$):

$$\frac{A^2}{\sqrt{G_2}} = \frac{A_0^2}{\sqrt{G_2}} \operatorname{ch} \varepsilon_2 \Gamma V \left(s - s_0\right) - \operatorname{shArch} \frac{A_0^2}{\sqrt{G_2}} \operatorname{sh} \varepsilon_2 \Gamma V \left(s - s_0\right). \tag{43}$$

В условиях других резонансов соответствующие решения являются более громоздкими.

Интеграл (37) существует при условии, что $\sin \psi_n \neq 0$, т.е. $\psi_n \neq k\pi$, где k — любое целое число. Если $\sin \psi_n = 0$, то при точном резонансе, как следует из уравнения (29), фаза ψ_n не изменяется. Рассмотрим подробнее этот режим движения частицы в случае волны линейной поляризации $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}w^0}{\mathrm{d}s} &= (-1)^{n+1} \varepsilon_2 \Gamma w_\perp J_n'(A) + \varepsilon_{03} \Gamma w^3, \\
\frac{\mathrm{d}w^3}{\mathrm{d}s} &= (-1)^{n+1} \varepsilon_2 N w_\perp J_n'(A) + \varepsilon_{03} \Gamma w^0, \\
\frac{\mathrm{d}w_\perp}{\mathrm{d}s} &= (-1)^{n+1} \varepsilon_2 \left(\Gamma w^0 - N w^3\right) J_n'(A).
\end{aligned} \tag{44}$$

Допустим, что найдено синхронизирующее электростатическое поле ε_{03}, так что выполняется условие резонанса (30). Тогда из последнего уравнения системы (44) следует:

$$\frac{1}{J_n'(A)} \mathrm{d}A = (-1)^{n+1} n V \Gamma \varepsilon_2 \mathrm{d}s. \tag{45}$$

При этом параметр A (поперечный импульс частицы) не должен совпадать с корнями уравнения $J_n'(A) = 0$. Уравнение (45) упрощается при условии, что параметр $A \lesssim 1$. В этом случае:

$$\frac{\mathrm{d}A}{A^{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{n V \Gamma \varepsilon_2}{2^n \left(n-1\right)!} \mathrm{d}s. \tag{46}$$

При циклотронном резонансе имеем решение:

$$A = A_0 + \frac{\Gamma V \varepsilon_2}{2} \left(s - s_0\right). \tag{47}$$

При резонансе на второй гармонике гирочастоты:

$$A = A_0 \exp\left[-\frac{\Gamma V \varepsilon_2}{2} \left(s - s_0\right)\right]. \tag{48}$$

При более высоких резонансах ($n \geqslant 3$):

$$\frac{1}{A^{n-2}} = \frac{1}{A_0^{n-2}} + (-1)^{n+2} \frac{n\left(n-2\right) \Gamma V \varepsilon_2}{2^n \left(n-1\right)!} \left(s - s_0\right). \tag{49}$$

Как видно из полученных формул, наиболее эффективным является синхронный режим движения частицы при циклотронном резонансе: лишь в этом случае поперечный импульс (и энергия) частицы монотонно возрастает. Это значит, что из возможных резонансов различного порядка механизм циклотронного авторезонанса является преобладающим. Однако, согласно точным уравнениям (20)–(24), движение частицы определяется всеми возможными резонансами, так что циклотронный резонанс не может проявляться независимо от других резонансов сколь угодно долго. На достаточно большом интервале слабое влияние высших резонансов может привести к расстройке циклотронного резонанса и сдвигу фазы. Когда этот сдвиг достигает порядка единицы, то высшие резонансы начинают играть существенную роль. В этом случае движение частицы становится сложным, стохастическим, характер которого может определяться также эффектами перекрытия резонансов.

5. Численное решение уравнений движения частицы в синхронном режиме

В точных уравнениях (13)–(17) фазы ϑ и ϑ_c являются быстро меняющимися переменными. Из комбинационных фаз $\vartheta \pm \vartheta_c$ фазу $\vartheta + \vartheta_c$ будем рассматривать также как быструю переменную. Комбинация $\vartheta_r = \vartheta - \vartheta_c$ определяет циклотронно-резонансное взаимодействие частицы с волной. Она должна считаться медленной (полубыстрой), переменной [3]. В случае не слишком мощной волны ($\varepsilon_i < 1$) точная система уравнений может быть усреднена по быстрым фазам. Тогда после усреднения система уравнений (13)–(17) в области циклотронного резонанса принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}w^0}{\mathrm{d}s} = \frac{w_\perp}{2}\left(\varepsilon_1 + \Gamma\varepsilon_2\right)\cos\vartheta_r, \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_\perp}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_1\left(w^0 - \Gamma N w^3\right) + \varepsilon_2\left(\Gamma w^0 - N w^3\right)\right\}\cos\vartheta_r, \tag{51}$$

$$\frac{\mathrm{d}w^3}{\mathrm{d}s} = \frac{N w_\perp}{2}\left(\Gamma\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)\cos\vartheta_r, \tag{52}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_r}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{\Omega}{\Gamma} - \Gamma w^0 + N w^3\right) - \frac{\sin\vartheta_r}{2w_\perp}\left\{\varepsilon_1\left(w^0 - \Gamma N w^3\right) + \varepsilon_2\left(\Gamma w^0 - N w^3\right)\right\}. \tag{53}$$

Из уравнения (53) следует, что условие точного циклотронного резонанса определяется соотношениями

$$\Gamma w^0 - N w^3 = \frac{\Omega}{\Gamma}, \quad \sin\vartheta_r = 0. \tag{54}$$

В случае волны, линейно поляризованной в направлении электростатического поля ($\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 \neq 0$), циклотронный резонанс сохраняется во всё время движения частицы при условии

$$\Gamma = N, \tag{55}$$

т.е. когда скорость электрического дрейфа равна

$$V = \frac{1}{N}\sqrt{N^2 - 1}. \tag{56}$$

Такой режим синхронного движения частицы возможен лишь в случае замедленной волны ($N > 1$). Если волна циркулярно-поляризована ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$), то режим авторезонанса возможен при условии

$$\Gamma = N^2 > 1, \tag{57}$$

при этом волна также должна быть замедленной. В случае волны с произвольной эллиптической поляризацией синхронизм частицы с волной может быть достигнут при условии, что скрещенное электростатическое поле удовлетворяет соотношению

$$\Gamma = \frac{1}{2\varepsilon_2}\left\{\varepsilon_1\left(N^2-1\right)+\sqrt{\varepsilon_1^2\left(N^2-1\right)^2+4\varepsilon_2^2N^2}\right\}. \tag{58}$$

Проводилось численное решение по методу Рунге–Кутта как точной системы уравнений (13)–(17), так и усреднённой системы (50)–(53) в различных условиях. На рисунках 1–4 изображены графики изменения энергии (в единицах энергии покоя), набираемой электронами на ускоряющем интервале 100 см, в случае линейно поляризованной волны ($\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$). Предполагалось, что частицы инжектируются в начале сопутствующей системы отсчёта с оптимальной фазой $\vartheta_{r0} = \pi$ и начальной энергией, равной $5\,m_0c^2$, в магнитном поле $B_0 = 100$ кГс, в поле ускоряющей волны микроволнового диапазона ($\lambda = 1$мм), для которой условие синхронизма $V = \frac{1}{N}\sqrt{N^2-1}$ достигается при скорости электрического дрейфа $V = 0.01$.

На рис. 1 представлено решение точной системы, а на рис. 2 — усреднённой системы уравнений при разных значениях амплитуды волны на ускоряющем промежутке.

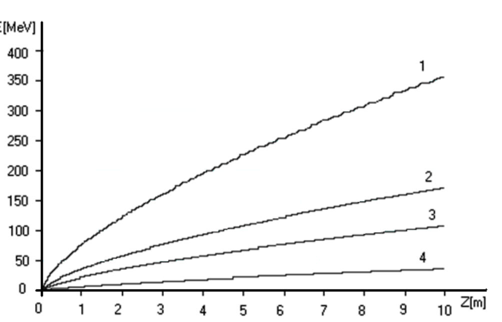

Рис. 1. Решение точной системы

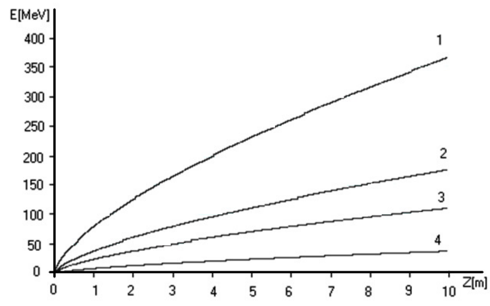

Рис. 2. Решение усреднённой системы

Эти решения подтверждают существование синхронного механизма ускорения электронов в указанных условиях. Видно, что с увеличением напряжённости ускоряющего поля частицы могут набирать значительную энергию. Решение усреднённой системы уравнений движения частицы достаточно хорошо совпадает с решением точной системы. Однако с увеличением скорости электрического дрейфа усреднённая система неадекватно описывает истинное движение частицы. Это демонстрируют рис. 3 и 4.

На том же ускоряющем интервале при $V = 0,05$ решение усреднённой системы (рис. 4) существенно отличается, качественно и количественно, от точного решения (рис. 3). Это можно объяснить тем, что при достаточно больших скоростях электрического дрейфа в сопутствующей системе, согласно формулам (7), магнитное поле в направлении распространения волны значительно ослабляется. В этом случае условия дрейфового приближения нарушаются, так что фазу циклотронного вращения ϑ_c нельзя считать быстрой переменной. Аналогичные результаты получаются в случае излучения с длиной волны 10μм.

При отсутствии синхронизирующего электрического поля ($V = 0$) при тех же значениях показателя преломления монотонного роста энергии частицы на том же ускоряющем промежутке не происходит. В этом случае, как и должно быть, энергия частицы является периодической функцией времени.

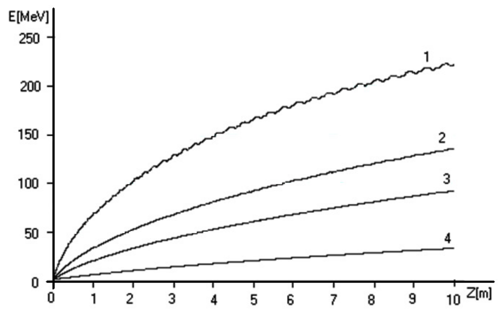

Рис. 3. Решение точной системы в случае увеличения скорости электрического дрейфа

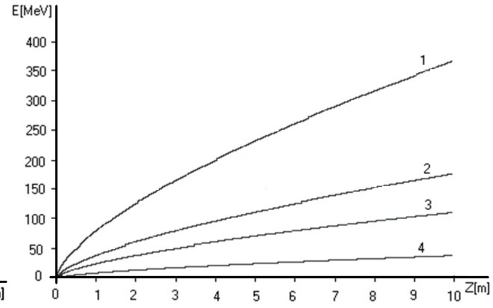

Рис. 4. Решение усреднённой системы в случае увеличения скорости электрического дрейфа

6. Заключение

Проведено исследование возможности поддержания синхронного режима движения заряженной частицы в поле замедленной электромагнитной волны в условиях циклотронного резонанса с помощью электростатического поля. Аналитически и численно показано, что при соответствующем подборе синхронизирующего электрического поля возможно эффективное ускорение частицы на сравнительно небольшом ускоряющем промежутке. Рассмотрены эффекты конечного гирорадиуса при резонансном взаимодействии частицы с волной в сопутствующей системе отсчёта. Отмечена ограниченность процедуры усреднения уравнений движения частицы в сопутствующей системе, движущейся со скоростью электрического дрейфа.

Литература

1. *Коломенский А. А., Лебедев А. Н.* Резонансные явления при движении частиц в плоской электромагнитной волне // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 44(1). — С. 261–269. [*Kolomenskiyj A. A., Lebedev A. N.* Rezonansnihe yavleniya pri dvizhenii chastic v ploskoyj ehlektromagnitnoyj volne // ZhEhTF. — 1963. — T. 44(1). — S. 261–269.]
2. *Давыдовский В. Я.* О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43, № 3(9). — С. 886–888. [*Davihdovskiyj V. Ya.* O vozmozhnosti rezonansnogo uskoreniya zaryazhennihkh chastic ehlektromagnitnihmi volnami v postoyannom magnitnom pole // ZhEhTF. — 1962. — T. 43, No 3(9). — S. 886–888.]
3. *Милантьев В. П.* Явление циклотронного авторезонанса и его применения // УФН. — 1997. — Т. 167(1). — С. 3–16. [*Milantjev V. P.* Yavlenie ciklotronnogo avtorezonansa i ego primeneniya // UFN. — 1997. — T. 167(1). — S. 3–16.]
4. *Милантьев В. П.* О возможности управления режимом авторезонанса с помощью сильного поперечного электростатического поля // ЖТФ. — 1994. — Т. 64(6). — С. 166–172. [*Milantjev V. P.* O vozmozhnosti upravleniya rezhimom avtorezonansa s pomothjyu siljnogo poperechnogo ehlektrostaticheskogo polya // ZhTF. — 1994. — T. 64(6). — S. 166–172.]
5. *Милантьев В. П.* Ускорение заряженных частиц электромагнитной волной в скрещенных полях в синхронном режиме // Вестник РУДН. Серия «Физика». — 2003. — № 11. — С. 95–103. [*Milantjev V. P.* Uskorenie zaryazhennihkh

chastic ehlektromagnitnoyj volnoyj v skrethennihkh polyakh v sinkhronnom rezhime // Vestnik RUDN. Seriya «Fizika». — 2003. — No 11. — S. 95–103.]

6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973. [*Landau L. D., Lifshic E. M.* Teoriya polya. — M.: Nauka, 1973.]
7. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.* Движение заряженных частиц в электромагнитных полях // В сб. Вопросы теории плазмы / под ред. под ред. М.А. Леонтовича. — М.: Госатомиздат, 1963. — Т. 2. — С. 177–261. [*Morozov A. I., Solovjev L. S.* Dvizhenie zaryazhennihkh chastic v ehlektromagnitnihkh polyakh // V sb. Voprosih teorii plazmih / под ред. pod red. M.A. Leontovicha. — M.: Gosatomizdat, 1963. — T. 2. — S. 177–261.]
8. *Милантьев В. П.* Теория взаимодействия резонансных частиц замагниченной плазмы с ВЧ волновыми пакетами // ЖЭТФ. — 1983. — Т. 85, вып. 1(7). — С. 132–140. [*Milantjev V. P.* Teoriya vzaimodeyjstviya rezonansnihkh chastic zamagnichennoyj plazmih s VCh volnovihmi paketami // ZhEhTF. — 1983. — T. 85, вып. 1(7). — S. 132–140.]
9. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. — М.: Высшая школа, 1965. [*Kuznecov D. S.* Specialjnihe funkcii. — M.: Vihsshaya shkola, 1965.]
10. *Андреев Ю. А., Давыдовский В. Я.* Поддержание резонанса с помощью электростатического поля // Изв. ВУЗов. Физика. — 1980. — Т. 23(11). — С. 96–97. [*Andreev Yu. A., Davihdovskiyj V. Ya.* Podderzhanie rezonansa s pomothjyu ehlektrostaticheskogo polya // Izv. VUZov. Fizika. — 1980. — T. 23(11). — S. 96–97.]
11. *Schram D. C., Beukema G. P.* The Effect of an Electric Field on Particle Acceleration at Cyclotron Resonance // Physica. — 1969. — Vol. 42. — Pp. 277–290.

UDC 533.932

Maintence of the Synchronism between a Particle and Electromagnetic Wave with the Help of Electrostatic Field

V. P. Milant'ev, Ya. N. Shaar, S. P. Karnilovich

Department of experimental physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

It is shown analytically and numerically that effective acceleration of the particle at the small distance at the regime of cyclotron autoresonance, supported with the help of synshronizied electrostatic field, is possible. It is shown that in the accompanying reference frame moving with the electric drift velocity the new resonant effects arise connected with the effects of finite gyroradius. It is noted that in the case of the large enough electric drift velocity in the accompanying reference frame the averaging of the motion equations becomes invalid.

Key words and phrases: charged particle, relativistic motion, electromagnetic wave, cyclotron autoresonance, electric drift, finite gyroradius.