АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВВЕДЕНИЯ СТОХАСТИКИ В ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»

Демидова А.В., Геворкян М.Н.

Российский университет дружбы народов, ademidova@sci.pfu.edu.ru, mngevorkyan@sci.pfu.edu.ru

В работе исследовано влияния введения стохастики в детерминистическую модель «хищник-жертва».

Ключевые слова: популяционная динамика, стохастическое моделирование, стохастическое дифференциальное уравнение.

Введение

В предыдущих работах авторов [1,2] разработан метод построения одношаговых стохастических моделей, который позволяет моделировать широкий класс явлений.

При стохастизации математических моделей возникает проблема, как ввести стохастический член, который интерпретируется не как внешнее случайное воздействие на систему, а имеет непосредственную связь с ее структурой. Для получения стохастических моделей предлагается рассматривать процессы, происходящие в системе, как одношаговые марковские процессы. Такой подход позволяет получать стохастические дифференциальные уравнения с согласованными стохастической и детерминистической частями, так как они выводятся из одного и того же уравнения. Привлечение теории стохастических дифференциальных уравнений позволяет провести качественный и численный анализ поведения решений уравнений для полученной стохастической модели. Для иллюстрации результатов предлагается использовать численные методы Рунге-Кутты разных порядков построения решений стохастических дифференциальных уравнений.

Детерминистическая модель «хищник-жертва»

Системы с взаимодействием двух видов популяций типа «хищник-жертва» широко исследованы и для таких систем существует большое количество разнообразных моделей. Самой первой моделью «хищник-жертва» принято считать модель, полученную независимо друг от друга А.Лоткой и В.Вольтеррой, которая описывается системой дифференциальных уравнений вида [3]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1 x - k_2 xy \\ \dot{y} &= k_2 xy - k_3 y \end{aligned} \tag{1}$$

где x — численность жертв, y — численность хищников, k_1 и k_3 — положительные постоянные коэффициенты, отражающие естественную рождаемость и смертность жертв и хищников соответственно, а k_2 это положительный постоянный коэффициент, для описания межвидового взаимодействия.

Стохастическая модель «хищник-жертва»

Рассмотрим модель системы «хищник-жертва», состоящую из особей двухвидов, причём один из них охотится, второй — обеспечен неисчерпаемыми пищевыми ресурсами. Введя обозначения X — жертва, Y — хищник, можно записать возможные процессы для вектора состояния $x^i = (X, Y)^{\mathrm{T}}$, где i — компонентный индекс [1,2]:

$$\begin{aligned} &X \xrightarrow{k_1} 2X, && \mathbf{r}^{i1} = (1, 0), \\ &X + Y \xrightarrow{k_2} 2Y, && \mathbf{r}^{i2} = (-1, 1), . \\ &Y \xrightarrow{k_3} 0, && \mathbf{r}^{i2} = (0, -1). \end{aligned}$$

Стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ланжевена для модели «хищник-жертва» имеет вид:

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1x-k_2xy\\ k_2xy-k_3y\end{pmatrix}\mathrm{d}t+b^i_a\begin{pmatrix}\mathrm{d}\,W^1\\ \mathrm{d}\,W^2\end{pmatrix},\ \text{где}\ b^i_a b^{ja}=B^{ij}=\begin{pmatrix}k_1x+k_2xy & -k_2xy\\ -k_2xy & k_2xy+k_3y\end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Исследование влияния стохастического члена

Качественное исследование детерминистической модели «хищник-жертва» (1) описано в многочисленной литературе. Приведем основные результаты.

Система (1) имеет два стационарных состояния: (0,0) и $(k_1/k_2, k_3/k_2)$. Точка (0,0) является седлом и определяет положение равновесия, которое характеризуется полным истреблением жертв и вымиранием хищников. Точка $(k_1/k_2, k_3/k_2)$ является центром и отражает стационарный режим сосуществования хищников и жертв с некоторыми ненулевыми численностями.

Фазовый портрет системы в окрестности стационарной точки $(k_1/k_2, k_3/k_2)$ представляет собой замкнутые эллиптические орбиты. Таким образом изменение численности обоих видов происходит по периодическому закону с амплитудой колебаний, определяемой начальными значениями x и y (рис.1). Решения имеют осциллирующие зависимости, показанные на (рис.2). Циклы повторяются неограниченно долго и качественно отражают свойства многих реальных систем «хищник-жертва».

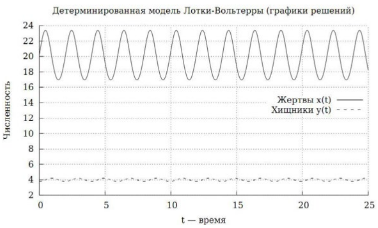

Рис. 1. Зависимость числа хищников и жертв от времени

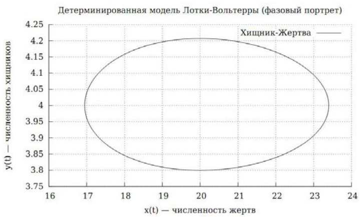

Рис. 2. Фазовый портрет системы «хищник-жертва»

В то же время этой системе присущи два принципиальных и взаимосвязанных недостатка. С математической точки зрения, система (1) негрубая и консервативная. Это означает, что включение в модель каких бы то ни было дополнительных факторов качественным образом меняет ее поведение. С другой стороны, данная модель не учитывает вероятностный характер процессов происходящих в системе.

Стохастическая модель

Рассмотрим изменение качественного поведения системы (1) при введении стохастического члена (система (2)).

Запишем первый интеграл для детерминистической части системы (2):

$$I(x,y)=k_2(x,y)-k_3\ln x-k_1\ln y. \qquad (3)$$

Далее воспользуемся формулой Ито для функции $\mathrm{d}\,I(x,y)$, запишем формулу для среднего изменения фазового объёма:

$$\langle \mathrm{d}\,I(x,y)\rangle=\frac{1}{2}\left(B^{11}\frac{k_3}{2x^2}+B^{22}\frac{k_1}{2y^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{k_1k_3}{x}+\frac{k_2k_3y}{x}+\frac{k_1k_2x}{y}+\frac{k_1k_3}{y}\right).$$

Поскольку $x,y\in\mathbb{R}_{\geq 0}$, то видно, что в стохастической модели фазовый объём в среднем монотонно возрастает. В конце концов задевается одна из осей, что говорит о гибели одной или обеих популяций. Данное поведение проиллюстрировано на рис.4. При этом временная зависимость имеет вид показанный на рис.3.

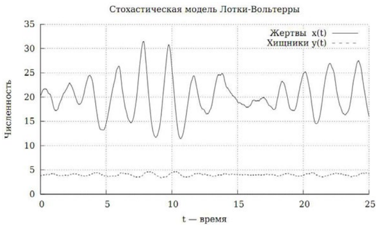

Рис. 3. Зависимость числа хищников и жертв от времени

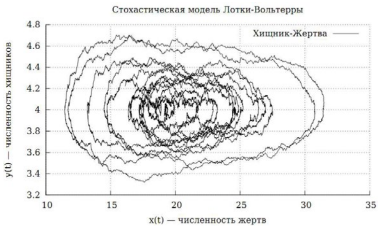

Рис. 4. Фазовый портрет системы «хищник-жертва»

Выводы

В работе продемонстрировано применение к модели типа «хищник-жертва», полученной в предыдущих работах, методики получения стохастической модели с согласованной стохастической и детерминистической частями.

Кроме того, для системы популяционной динамики типа «хищник–жертва» было получено, что в детерминистическом случае, решения уравнений имеют периодический вид и фазовый объем сохраняется, в то время как, введение стохастики в модель, дает монотонное возрастание фазового объема, что говорит о неизбежной гибели одной либо обеих популяций.

Предложенный метод позволяет получить универсальные правила записи стохастических дифференциальных уравнений для систем, процессы в которых представимы как одношаговые процессы, а также расширить аппарат инструментов, используемых для анализа модели, так как одновременно при применении данного подхода для описания системы можно получить обыкновенное стохастическое дифференциальное уравнение и уравнение в частных производных в форме уравнения Фоккера-Планка.

Литература

1. *Кулябов Д. С., Демидова А. В.* Введение согласованного стохастического члена в уравнение модели роста популяций // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2012. — № 3. — С. 69–78.

2. *Демидова А. В.* Уравнения динамики популяций в форме стохастических дифференциальных уравнений // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2013. — № 1. — С. 67–76.

3. *Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П.* Динамические системы и модели биологии. — М.: Физматлит, 2010.

INFLUENCE ANALYSIS INTRODUCTION STOCHASTIC DETERMINISTIC MODEL "PREDATOR-PREY"

Demidova A.V., Gevorkyan M.N.

Peoples' Friendship University of Russia, ademidova@sci.pfu.edu.ru, mngevorkyan@sci.pfu.edu.ru

The aim was to study the effect of the introduction of probability in a deterministic model of "predator-prey".

Key words: population dynamics, stochastic modeling, stochastic differential equation.