ИДЕИ И ПРОБЛЕМЫ, СОПУТСТВУЮЩИЕ РЕЛЯЦИОННОЙ ПАРАДИГМЕ

О ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ АНАЛИТИКЕ И РЕАЛЬНОСТИ ФРАКТАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

А.П. Ефремов

Институт гравитации и космологии Российского университета дружбы народов

С позиций анализа алгебраических структур – гиперкомплексных чисел и теории матриц (в частности спектральной теоремы) – обсуждается проблема визуализации одного из наиболее абстрактных математических объектов – множества спиноров. Показано, что при обращении к понятию фрактального пространства – реальному математическому, но виртуальному физическому объекту – появляется возможность предложить геометрический (более точно – предгеометрический) образ пары сопряженных спиноров. Приводятся аргументы в пользу фрактальной поверхности как реальной сущности, определяющей структуру трехмерного физического мира.

Ключевые слова: комплексные числа, кватернионы, спиноры, фрактальное пространство.

Введение

И сам человек, сколь ни был бы он совершенен по собственным или внешним меркам, и приборы, созданные им для наблюдения и исследования окружающего его мира, при беспристрастной оценке, весьма и весьма несовершенны, и, более того, наоборот, очень слабы.

Ни человек, ни самые хитроумные и дорогие его приспособления, интерферометры, спектрометры, коллайдеры, не только ***не наблюдают*** четвертого измерения или физических полей, но ***не видят*** даже «обычного» электрона. Человек обладает лишь косвенной информацией о том, что происходит «на самом деле», и на основании этой информации мы строим свои гипотезы –

наши догадки об этом, на «самом деле происходящем», – и теории, математический способ описания этих догадок. По крайней мере, примерно так действуют те, кто занимается теоретической физикой в последнем столетии.

И раз уж об этом зашел разговор, стоит кратко обратиться к исторической практике появления физических законов; здесь автор выделил бы три метода, возникших в разное время.

Три метода поиска законов физики

Первый – метод «наблюдательной эмпирики», когда исследователи поступали просто (но, может быть, наиболее эффективно): набирали экспериментальную статистику некоторого физического явления, заполняли таблицы, строили графики, а затем, как правило, подбирали к результирующему графику подходящую функциональную зависимость, выраженную математической формулой; эта зависимость объявлялась физическим законом. Реже закон формулировался вербально. Следует заметить, что датировать рождение научных эмпирических подходов к исследованиям физического мира непросто. Некоторую нижнюю временную границу можно провести, наверное, в интервале XVI–XVII вв. в период становления «экспериментальной теории» механики. Но, по сути, этот метод применялся всегда; успешно он применяется и по сей день, как в масштабах пико- и наномира, так и в мегамасштабах Вселенной. Однако у сегодняшней наблюдательной эмпирики есть мощная конкуренция, ее составляют исследовательские методики, получившие быстрое развитие в последующие временные периоды.

Второй путь познания – метод «механико-математической аналитики». Этот важнейший (с точки зрения автора) метод образовался в XVIII–XIX вв. усилиями математиков, людей, практически не связанных с физическим экспериментом, но обнаруживших в, казалось бы, несложном численном описании эмпирической механики Ньютона необыкновенные математические глубины. Мопертюи, Эйлер, Гамильтон, Якоби – великие математики, создавшие аналитическую механику, которую уже в XX в. известный физик Вигнер называл непостижимой. И поныне механика часто считается разделом чистой математики, а в некоторых университетах архаично сохранились механико-математические факультеты. На этот же период приходится математическое развитие механистических и одновременно статистических моделей строения вещества – термодинамики и статистической физики.

Наконец, третий метод – «физико-математическая эмпирика и эвристика». По сути, это метод становления современной теоретической физики. Одним из первых признаков ее зарождения можно было бы считать формулировку Максвеллом уравнений электродинамики, основанную на определенных догадках, впервые скорее математических, нежели физических. Но о теории Максвелла чуть позже. А один из самых ярких примеров собственно теоретического мышления этого периода – реализация на рубеже XX века идеи Планка о квантовой модели электромагнитного излучения. Развитая на этой базе Эйнштейном теория фотоэффекта проверялась в течение десятка лет и была уверенно подтверждена. Идею Планка, пожалуй, можно отнести к физико-математической эмпирике, то есть к варианту построения некоторой модели, подлежащей математическому описанию.

Последовавший за этим другой ярчайший пример построения эвристической модели – эйнштейновская теория гравитации, модельной базой которой служит дифференциальная геометрия искривленных пространств. Однако здесь есть место и эвристике, как и в случае более ранней специальной теории относительности, где Эйнштейн «случайно вдруг заметил», что преобразования Лоренца могут быть связаны не только с уравнениями электродинамики, но и с геометрией четырехмерного пространства. Впрочем, о преобразованиях Лоренца тоже чуть ниже.

Беспримерный образец подобной эвристики – квантовая механика, существенная отличительная черта которой – полное отсутствие модели. Шредингер и его выдающиеся коллеги-соперники эвристически постулировали некую математическую систему, которая, как оказалось, верно описывает результаты многих экспериментов. Но это, пожалуй, был уникальный случай; с ним сравним, а точнее, дополняет его лишь пример спинового слагаемого, введенного Паули в уравнение Шредингера. Других эвристических теорий, равных по качеству квантовой механике, предложено не было (квантовую электродинамику таковой считать пока сложно).

Последующие почти сто лет прошли (и продолжаются) частично в рамках применения третьего метода, но результаты, скажем честно, не слишком велики. Физики (как и некоторые математики) лишь уточняли области применения найденных законов и строили модели их вероятных обобщений. Исчерпав перечень допустимых задач, сегодняшние исследователи вынужденно перешли к моделям физических объектов с отрицательным давлением и мнимой массой.

О физико-математической аналитике

Еще в позапрошлом веке в методике поиска фундаментальных физических законов начали проявляться совсем новые тенденции. Вернемся к двум отложенным примерам, первый из них – формулировка уравнений электродинамики. Известно, что Максвелл, изучая совместно разные уравнения электричества и магнетизма, увидел возможность сделать эту систему чисто математически более симметричной, добавил «ток смещения», и вот уже более 150 лет уравнения электродинамики – эталон точности и физико-математической красоты. И – источник теории относительности. Ибо преобразования, оставляющие неизменным интервал пространства-времени, возникли безотносительно к геометрии мира, связи, которую подметил Эйнштейн. Лоренц получил свои преобразования в результате решения чисто математической задачи, не выстраивая при этом никаких моделей. И Максвелл, и Лоренц следовали строгой логике, которую допускала избранная ими математическая среда.

По сути, они действовали в рамках известной ранее математической аналитики, но теперь уже не в узкой области классической механики, а в гораздо более широкой сфере известной на тот момент физики. Метод математической аналитики начал свое возрождение на новом уровне.

В XX веке произошел ряд значимых событий, связанных с этим методом, не предполагающим ни эмпирического построения математических моделей, ни эвристического «схождения с небес» формулы великого закона в сознание великого ученого. Два таких громких события имели своим следствием награждение их авторов Нобелевской премией. Одно из них – формулировка уравнений спинорного поля, для чего Дирак «просто проделал» точную математическую работу – извлек «корень квадратный» из уже известного дифференциального уравнения. Второе событие – создание теории кварков, для классификации которых Гелл-Ман «просто использовал» готовую математическую структуру, группу специальных унитарных преобразований размерности три.

Из серии других примеров аккуратного следования логике математических структур здесь упомянем лишь еще один, менее известный, но очень странный и пока не имеющий объяснения. Речь об открытии швейцарского математика Рудольфа Фютера, сделанном в 30-е годы XX века. Записав уравнение типа Коши–Римана, обобщающее условия аналитичности функции комплексного переменного на функцию гиперкомплексного переменного, Фютер получил в точности систему уравнений электродинамики Максвелла – достаточно было записать переменные этой системы в физических единицах. Этот удивительный факт пока приходится оставить без комментариев. А сейчас вспомним слова, выделенные во введении курсивом.

Спинор, спектральная теорема и фрактальное пространство

Человек и его приспособления ***не видят*** электрон. Зададимся вопросом – почему? Ответ физика-теоретика может оказаться таким: электрон в квантовой теории описывается спинорной функцией, а спинор – не то что увидеть – представить себе нельзя.

Смотрим, как описывает спинор российская версия упрощенного электронного справочника[1]: «Спино́р (англ. spin – вращаться) – специальное обобщение понятия вектора, применяемое для лучшего описания группы вращений евклидова или псевдоевклидова пространства… у них отсутствует какой-либо прямой геометрический смысл».

В параллельной англоязычной версии есть даже попытки изобразить спинор в физическом пространстве; отсылаем по адресу[2] для ознакомления читателя с тем, насколько, с его точки зрения, это может быть похоже на модель электрона. Те, кто неплохо знаком с фундаментальной математикой, здесь найдут не только визуальные, но и сущностные основания для критики.

[1] URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Спинор
[2] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Spinor

Объект, в дальнейшем ставший математическим описанием электрона, ввел Эли Картан в начале XX века, и только почти через 20 лет, после опытов Штерна–Герлаха, догадок Уленбека и Гаудсмита и, наконец, гениального обобщения Паули уравнения квантовой механики новым слагаемым, Эренфест назвал этот объект спинором. Но и Картан в своей трудно читаемой книге «Теория спиноров», вышедшей еще через десяток лет, рассматривал спиноры как объекты неких реальных пространств, что еще более усложняет понимание сути этих величин.

Ситуация существенно проясняется при изучении, казалось бы, далекой от физики фундаментальной теории матриц, в частности замечательной спектральной теоремы, которая устанавливает соответствие между неособенной простой квадратной матрицей и гораздо более простыми объектами, ее составляющими, – элементами так называемого биортогонального базиса. Элементы базиса – также матрицы, имеющие формат векторов (столбцы) и ковекторов (строки); число этих элементов равно рангу исходной квадратной матрицы. Вкратце это общее содержание теоремы. Но как это связано с обсуждаемой темой спиноров и физикой вообще? Ответ может показаться неожиданным, хотя для специалистов в области гиперкомплексных чисел он лежит на поверхности. Достаточно рассмотреть спектральную теорему для квадратной матрицы ранга 2 и с нулевым следом (суммой диагональных компонент); легко убедиться в том, что матрицы такого типа описывают мнимые единицы в алгебрах комплексных и гиперкомплексных чисел.

Следующий для такой матрицы из спектральной теоремы биортогональный базис представлен парой двумерных векторов (и ковекторов), задающих площадку на некоторой поверхности. Отметим этот существенный факт: пара единичных и ортогональных векторов полученного базиса имеет геометрический образ площадки плоской поверхности.

Теперь перейдем к алгебраическим манипуляциям, рассмотрим все возможные комбинации прямых произведений элементов этого базиса. Результат оказывается удивительным и нетривиальным. Все искомые комбинации исчерпываются лишь четырьмя двумерными матрицами, одна из которых представляет собой скалярную единицу, а три остальных (включая исходную) суть матричное представление векторной триады мнимых единиц гиперкомплексной алгебры кватернионных чисел. Эта триада, как известно со времен Гамильтона, открывшего алгебру кватернионов, имеет внятный геометрический образ направляющих единичных векторов декартовой системы координат в трехмерном пространстве.

Также известно, что повороты такой триады не нарушают законов алгебры и могут осуществляться преобразованием подобия с использованием операторов группы пространственных отражений (спинорной группой). И здесь мы подходим к главному.

Пусть область физического пространства задается тремя векторами кватернионной триады и каждой из трех размерностей соответствует условное значение, равное, например, единице (это – характеризующий 3D-размерность показатель степени, в которую нужно возвести направляющий вектор, чтобы получился этот самый вектор). Но спектральная теорема гласит, что каждый такой вектор есть, по сути, квадрат элементов биортогонального базиса. Следовательно, показатель степени 3D-вектора (единица) есть сумма показателей степени двух более простых элементов, формирующих двумерную площадку некой поверхности. Это значит, что по сравнению с 3D-пространством размерность «подлежащей» 2D-поверхности характеризуется числом ½. Такого рода пространства, имеющие дробную размерность, называют фрактальными. Итак, исходя из строгих математических рассуждений можно прийти к заключению, что в основе физического пространства может лежать некоторая фрактальная поверхность.

Следующий этап рассуждений касается простейшего движения кватернионной триады в 3D-мире – ее поворота вокруг одного из своих векторов (так называемый плоский поворот). И пусть этот поворот задается преобразованием подобия с использованием вышеупомянутой спинорной группы. Но поскольку 3D-вектор есть произведение двух элементов базиса фрактальной поверхности, эта математическая конструкция распадается на два преобразования каждого из элементов. Напомним, что эти элементы – 2D-векторы и ковекторы, то есть столбцы и строки; в результате указанного преобразования они приобретают фазовый множитель (экспоненту с фазой в показателе). И если вспомнить эвристику Паули и термин Эренфеста, то получается, что объекты, принадлежащие двумерной фрактальной поверхности, представляют собой спиноры, в квантовой механике описывающие, в частности, электрон.

И этот вывод, как оказывается, можно сделать, не строя математических моделей и не ожидая никаких эвристических откровений, а лишь внимательно и строго следуя несложной математической логике, но, конечно, заранее зная, что спиноры описывают электрон, так что открытия великих предшественников отнюдь не отменяются. Но теперь эти открытия и догадки можно анализировать уже с позиций, допускающих визуализацию, поскольку обсуждаемые объекты очевидно обладают внятными геометрическими свойствами (или пред-геометрическими, как называл гипотетические «оперативные пространства» квантовой механики Джордж Арчибальд Уилер).

Одним из вариантов такого анализа спиноров является разработанный автором метод изображения пары спиноров как пары векторов на фрактальной поверхности, содержащей два действительных и два мнимых измерения (см. рис. 1 *а, б, в, г*).

На рис. 1 показано искажение площадки фрактальной поверхности при изменении присущей ей фазы, каждый их векторов, образующих площадку, является спинором. При нулевой фазе (рис 1 *а*) вся площадка лежит в области действительных чисел. При увеличении фазы (рис 1 *б*) действительная площадка сокращается, но появляется мнимая площадка, которую на 3D-рисунке можно показать лишь линией, ортогональной действительным (горизонтальным) осям; но для наглядности можно изобразить ортогональной окружностью (рис. 1 *в*). С увеличением фазы реальная площадка уменьшается, стремясь к нулю, мнимая – увеличивается, стремясь к максимальному значению при фазе π/2. Таким образом, если фаза линейно зависит от времени, то локальная область фрактальной поверхности осциллирует, при этом действительная область «перекачивается» в мнимую и обратно.

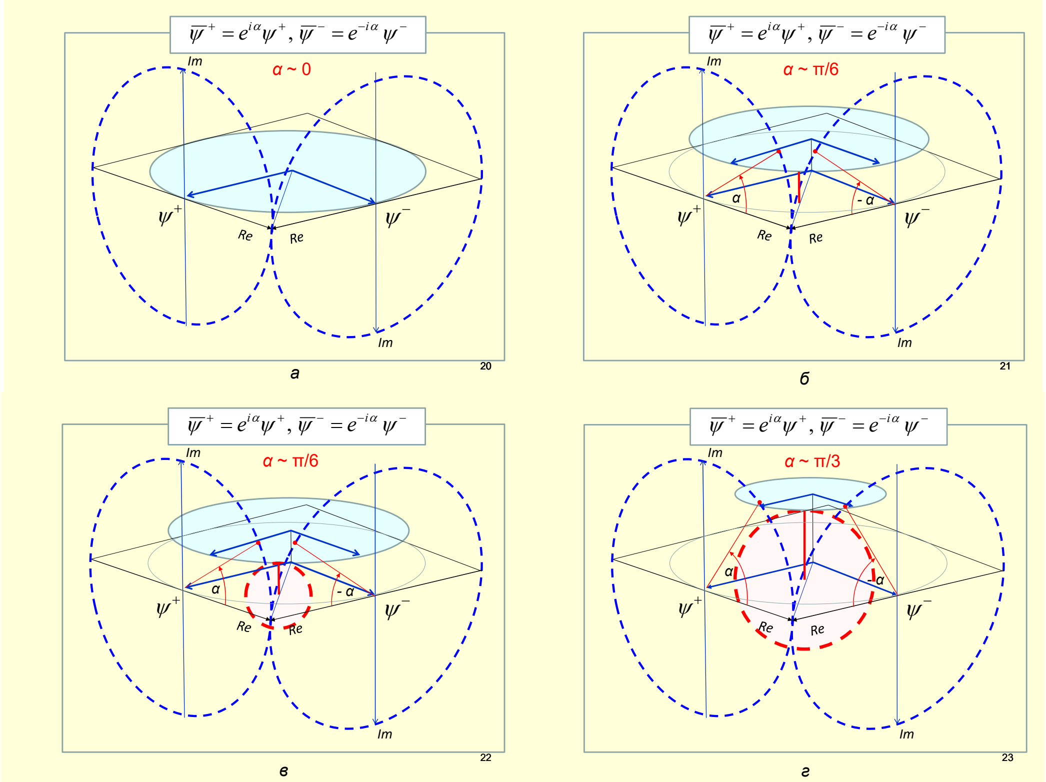

Рис. 1

Что же при этом происходит в трехмерном пространстве? Несложный расчет – построение кватернионной триады из векторов этого спинора – показывает, что соответствующая триада вращается в пространстве с постоянной угловой скоростью вокруг одного из своих векторов.

По сути, на рис. 1 изображен полный пред-геометрический образ простейшего переменного двухкомпонентного спинора. Этот объект может являться функцией физических переменных – координат и времени, но как «геометрическая сущность» он полностью лежит в 2D-ячейке – локальной области двумерной (комплекснозначной) фрактальной поверхности, невидимой из физического мира. Его трехмерным воплощением является вращающаяся триада аксиальных векторов, направляющих декартову систему координат.

Из этого следует, что попытки изобразить собственно спинор в привычном нам трехмерном пространстве конфигураций бессмысленны. Авторы таких попыток это чувствуют, и, представляется, поэтому склонны считать (см. выше), что «…у них (спиноров) отсутствует какой-либо прямой геометрический смысл».

Как видно из вышесказанного, такой смысл есть. Спиноры «не живут» в физическом мире, их мир 2D-ячейки – двумерные площадки дробной размерности.

Фрактальная геометрия – реальность или идеальная конструкция?

Ситуация с двумерными спинорами вроде бы представляется не уникальной, поскольку спектральная теорема верна для матриц любого ранга. И если неособенная и простая квадратная матрица может описывать единичный вектор в некотором пространстве, то родственный ей биортогональный базис, вообще говоря, должен принадлежать пространству «половинной» размерности. То есть число квази-спинорных функций должно бы быть бесконечным, как бесконечно множество натуральных чисел, определяющих ранг матриц. Однако на сегодняшний день эти рассуждения, скорее, имеют характер математических догадок, ибо автору пока не известен универсальный алгоритм построения матриц-векторов произвольного ранга из соответствующих этому рангу квази-спиноров.

В этом смысле ситуация с двумерными спинорами не только выделяется, но и уникальна. Эти простейшие объекты составляют основу, на которой определенно строится базис фундаментальной математической структуры, алгебры кватернионных чисел; строго доказано, что это – последняя (по размерности) алгебра с ассоциативным умножением.

Но, с другой стороны, из элементов фрактальной поверхности конструируется триада векторов, задающая область знакомого из физического и жизненного опыта трехмерного пространства. И здесь возникает естественный вопрос: является ли эта фрактальная поверхность физической сущностью, столь же реальной, как и само пространство, которое мы ощущаем и осознаем как данность? Некий вариант поиска ответа на этот вопрос может представлять следующая цепочка размышлений.

Если фрактальное пространство – физическая сущность, то построенные из элементов этого пространства локальные области трехмерного мира, в котором мы живем, должны характеризоваться наличием в них некоторых аксиальных структур. Иными словами, на каком-то пространственном масштабе окрестности точек пространства должны демонстрировать некие «вращательные» свойства; не исключено, что эти окрестности могут быть «заняты» частицами. Прямо скажем, о таких свойствах собственно пространства или частиц пока ничего не известно, поскольку современные (общепринятые) методы математического исследования сверхмалых физических объектов не предполагают их геометрического образа.

Фрактальная поверхность в целом представляется весьма странным объектом, в первую очередь, в силу ее дробной размерности, но также и потому, что она имеет сложную структуру, содержащую действительные и мнимые области. Человеческий разум долго не мог свыкнуться даже с математикой мнимых чисел; воспринимать геометрию мнимых пространств еще сложнее. Короче, причин для сомнений в физической реальности «спинорного мира» более чем достаточно.

Вместе с тем у этого мира есть мощная защита – это теория квантовой механики, в которой спинор является базовым элементом. И тут также сле-

Вместе с тем у этого мира есть мощная защита – это теория квантовой механики, в которой спинор является базовым элементом. И тут также следует напомнить, что это не только эвристическая теория Шредингера и Гейзенберга. В недавней работе автора этой статьи строго показано, что уравнение квантовой механики есть не что иное, как записанное в избранных физических единицах условие стабильности трех первых (по размерности) исключительных алгебр при простейших искажениях 2D-ячейки – ее осцилляции и конформного растяжения. Возможность чисто математического вывода уравнения Шредингера, а также многократно проверенная на опыте успешность этого уравнения как метода описания малых нерелятивистских частиц отнюдь не тривиальные факты. Наконец, здесь продемонстрирован вариант внятного геометрического образа «мира спиноров», которому принадлежит волновая функция квантовой механики. Все это вызывает и усиливает интерес к фрактальной поверхности как возможному физическому объекту, несмотря на сложности в интерпретации ее структуры.

Теории многомерных пространств долго вызывали споры. Теперь о таких пространствах убежденно говорят как о физической реальности. Дело привычки. Но критерием истины, как всегда, окажется практика будущих физических экспериментов.

PHYSICAL AND MATHEMATICAL ANALYTICS AD REALITY OF THE FRACTAL SPACE

A.P. Yefremov

Institute of Gravitation and Cosmology of RUDN University

One of the most abstract and unconceivable physical entity, the set of spinor math objects, is discussed from the viewpoint of the matrix and hypercomplex number algebra analysis. It is shown that addressing to the fractal space notion as a real mathematical but virtual physical structure a possibility appears to suggest a pre-geometric image of a couple of conjugated spinors, and arguments are given for reality of the fractal space existence as the physical essence.

Keywords: Complex numbers, quaternion, spinor, fractal space.