Математика

УДК 517.977

Необходимые условия оптимальности в задаче со сменой фазовых пространств

И. С. Максимова

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В настоящей работе для задачи со сменой фазовых пространств получены необходимые условия оптимальности. Смена фазовых пространств обусловлена наличием в задаче нескольких управляемых объектов с последовательным во времени режимом их работы. Подобные задачи имеют как физическое, так и экономическое приложения.

Ключевые слова: задача оптимального управления, смена фазового пространства.

1. Постановка задачи

Имеется $m-1$ фазовое пространство $X_1 = R^{m_1}, \dots, X_{m-1} = R^{m_{m-1}}$, переменных $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im_k}), k = \overline{1, m-1}$, соответственно, имеющих разную размерность.

Движение управляемого объекта описывается $(m-1)$-й системой дифференциальных уравнений, каждая из которых определена на своём отрезке времени и в своём фазовом пространстве, т.е.:

$$\begin{gathered} \dot{x_i}(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \\ x_i(t) \in X_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{1, m-1}, \end{gathered} \tag{1}$$

при условии $u_i(t) \in U_i(t)$. Функции $f_i(t, x_i(t), u_i(t)), i = \overline{1, m-1}$ непрерывно дифференцируемы по (x_i, u_i) для п.в. t, измеримы по t при любых фиксированных (x_i, u_i) вместе со своими частными производными по (x_i, u_i).

Класс допустимых управлений состоит из множества всевозможных измеримых, существенно ограниченных функций $u_i(\cdot)$, определённых, каждая на своём конечном отрезке, и удовлетворяющих условиям $u_i(t) \in U_i(t)$ для п.в. t. Здесь $U_i(t)$ — заданные многозначные отображения, ставящие в соответствие каждому t непустые подмножества $U_i(t) \subseteq R^{m_i}$, $i = \overline{1, m-1}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение [1]:

Определение 1. Измеримая функция v называется измеримым селектором многозначного отображения U, если $v(t) \in U(t)$ для почти всех t.

Многозначные отображения U_i предполагаются измеримыми, т.е. существуют последовательности измеримых селекторов $\{v_j^i\}, i = \overline{1, m-1}$ такие, что множества $\{v_j^i\}, i = \overline{1, m-1}$, $j = 1, 2, \dots$ всюду плотны в $U_i(t)$, соответственно, для почти всех t. Также многозначные отображения U_i предполагаются полунепрерывными сверху слева в точках t_i и полунепрерывны сверху справа в точках t_{i+1}, и они имеют измеримые селекторы $\{v_j^i\}$, непрерывные слева в точках t_i и справа в точках t_{i+1}, для которых последовательности $\{v_j^i(t_s)\}$ всюду плотны во множествах $U_i(t_s)$, $s = \overline{1, m}$.

Решениями систем (1) при $t \in [t_i, t_{i+1}], i = \overline{1, m-1}$ называются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на $[t_i, t_{i+1}]$, соответственно, системам (1).

В каждом пространстве X_i, $i = \overline{1, m-2}$ заданы отображения

$$q_i : X_i \to X_{i+1}, \quad i = \overline{1, m-2},$$

с помощью которых в заданные моменты времени t_i осуществляется последовательный переход из одного пространства в другое (каждое из таких отображений q_i предполагается гладким).

Задан функционал:

$$K_0(x_1, \cdots, x_m), \tag{2}$$

где $x_1 = x(t_1)$, $x_m = x(t_m)$, $x_i = x(t_i - 0)$, $x(t_i + 0) = q_{i-1}(x(t_i - 0))$, $i = \overline{2, m-1}$. Моменты времени $t_1, \cdots, t_m$ считаются заданными. Функция $K_0(x_1, \cdots, x_m)$ предполагается непрерывно дифференцируемой по $x_1, \cdots, x_m$.

Движение объекта осуществляется по следующей схеме. В момент времени t_1 в пространстве X_1 объект движется по решениям первой из систем (1) до момента времени t_2, далее происходит переход в пространство X_2 под действием отображения $q_1 : X_1 \to X_2$ и дальнейшее движение объекта осуществляется по решениям второй системы из (1) с начальным условием $x_2(t_2) = q_1(x_1(t_2))$ и т.д. до последнего пространства X_{m-1}. В пространстве X_{m-1} объект движется по решениям $(m-1)$-й системы из (1) с краевым условием $x(t_{m-1} + 0) = q_{m-2}(x(t_{m-1} - 0))$ до конечного момента времени t_m.

Предполагается, что в моменты времени t_1 и t_m на начальное и конечное положения не наложены никакие ограничения, т.е. концы траектории свободны.

Задача оптимизации заключается в том чтобы среди всех допустимых управлений u_i, $i = \overline{1, m-1}$, переводящих объект из начального положения в конечное, найти такие, для которых функционал $K_0(x_1, \cdots, x_m)$ принимал бы наименьшее возможное значение. Подобные задачи изучались ранее, например, в работах [2] и [3].

2. Решение задачи

Обозначим через $p = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $p^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$, где (x^*, p^*, u^*) — оптимальный процесс в поставленной задаче со свободными концами. Далее обозначение $*$ для краткости опускаем.

В настоящей работе для поставленной задачи получены необходимые условия оптимальности, которые можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть (x^*, p^*, u^*)– оптимальный процесс в поставленной задаче, тогда он удовлетворяет следующим условиям:*
существуют абсолютно непрерывные m_i-мерные вектор-функции ψ_i, $i = \overline{1, m-1}$, такие, что
(i) на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ функция ψ_i удовлетворяет сопряжённой системе

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial f_i(t, x_i(t), u_i(t))}{\partial x_i} \psi_i(t); \tag{3}$$

(ii) выполняются условия трансверсальности в граничных точках t_1 и t_m

$$\psi_1(t_1) = \frac{\partial K_0(p)}{\partial x_1}, \quad \psi_{m-1}(t_m) = -\frac{\partial K_0(p)}{\partial x_m} \tag{4}$$

и условия трансверсальности в точках «стыка»

$$\psi_{i-1}(t_i) = -\frac{\partial K_0(p)}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial q_{i-1}}{\partial x_{i-1}}\right)^* \psi_i(t_i), \quad i = \overline{2, m-1}; \tag{5}$$

(iii) для п.в. t выполнены условия максимума функции Понтрягина

$$H_i(t, u_i^*(t)) = \sup_{u_i \in U_i(t)} H_i(t, u_i), \quad i = \overline{1, m-1}, \tag{6}$$

где

$$H_i(t, x_i, u_i, \psi_i) = \langle f_i(t, x_i, u_i), \psi_i \rangle, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Доказательство. Получим для поставленной задачи условия трансверсальности в моменты времени $t_1, \dots, t_m$. Докажем, что существуют абсолютно непрерывные m_i-мерные вектор-функции ψ_i, $i = \overline{1, m-1}$ такие, что (i) на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ функция ψ_i удовлетворяет сопряжённой системе (3), обозначив $\frac{\partial f_i(t, x_i(t), u_i(t))}{\partial x_i}$ через $A_i^*(t)$, получим систему (3) в виде

$$\dot{\psi}_i(t) = -A_i^*(t)\psi_i(t) \tag{7}$$

(ii) выполняются условия трансверсальности (4) в граничных точках t_1 и t_m и условия трансверсальности в точках «стыка» (5).

Будем последовательно выводить условия трансверсальности слева направо, рассматривая отрезки времени один за другим. Рассмотрим сначала отрезок $[t_1, t_2]$. Правая часть уравнения

$$\dot{\psi}_1(t) = -A_1^*(t)\psi_1(t) \tag{8}$$

линейна по переменной ψ_1. Поэтому, в силу теоремы существования для линейных дифференциальных уравнений, уравнение (8) имеет на отрезке $[t_1, t_2]$ решение ψ_1 с начальным условием (4), т.е.

$$\psi_1(t_1) = \frac{\partial K_0(p)}{\partial x_1}. \tag{9}$$

Возьмём произвольный вектор $a \in R^{m_1}$ и возмутим начальное условие. По теореме существования решения задачи Коши при малых возмущениях начальных условий для любого числа $\alpha > 0$ задача Коши

$$\dot{x_1} = f_1(t, x_1, u_1^*(t)), \quad x_1(t_1) = x_1^* + \alpha a$$

имеет решение $x_1(t, \alpha)$, $t \in [t_1, t_2]$. Тогда для любого $\alpha > 0$, очевидно, выполняется неравенство

$$\alpha^{-1}(K_0(x_1(t_1, \alpha), x_2(t_2, \alpha), x_3(t_3, \alpha), \cdots, x_m(t_m, \alpha)) - \\ - K_0(x_1(t_1), x_1(t_2), x_2(t_3), \cdots, x_m)) \geqslant 0. \tag{10}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha \to 0+$, получаем

$$\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_1}, a \right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_2}, \delta_1(t_2) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_3}, \delta_2(t_3) \right\rangle + \cdots + \\ + \left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_{m-1}}, \delta_{m-2}(t_{m-1}) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_m}, \delta_{m-1}(t_m) \right\rangle \geqslant 0, \tag{11}$$

где $\delta_{i-1}(t_i) = \frac{\partial x_{i-1}}{\partial \alpha}(t_i, 0), i = \overline{2, m}$ (здесь и далее аргумент p^* для краткости опущен).

Выпишем уравнение в вариациях для системы

$$\dot{x_1} = f_1(t, x_1, u_1),$$

получим, что $\delta_1(t)$ является решением линейного однородного уравнения

$$\dot{\delta_1}(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t)\delta_1(t), \quad \delta_1(t_1) = a. \tag{12}$$

Обозначим через Φ_1 фундаментальную матрицу уравнения (12). Тогда $\Phi_1(t_1)$-единичная матрица и $\delta_1(t_2) = \Phi_1(t_2)a$.

Поскольку $q_1(x_1(t_2, \alpha)) = x_2(t_2, \alpha)$, то

$$\delta_2(t_2) = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1(t_2, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\delta_1(t_2).$$

Аналогично предыдущему, для i-й системы

$$\dot{x_i} = f_i(t, x_i, u_i),$$

на отрезке времени $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{2, m-1}$ получим, что $\delta_i(t)$ является решением линейного однородного уравнения

$$\dot{\delta_i}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t)\delta_i(t), \quad \delta_i(t_i) = \frac{\partial q_{i-1}}{\partial x_{i-1}}\delta_{i-1}(t_i). \tag{13}$$

Обозначим через Φ_i фундаментальную матрицу уравнения (13). Тогда $\Phi_i(t_i)$ — единичная матрица и

$$\delta_i(t_{i+1}) = \Phi_i(t_{i+1})\frac{\partial q_{i-1}}{\partial x_{i-1}}\delta_{i-1}(t_i) = \Phi_i(t_{i+1}) \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\Phi_1(t_2)a.$$

Теперь рассмотрим сопряжённые уравнения для переменных ψ_i, $i = \overline{2, m-1}$

$$\dot{\psi_i}(t) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t)\psi_i(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \tag{14}$$

которые имеют на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$ решения ψ_i с начальными условиями, определяемыми из условий

$$\psi_{i-1}(t_i) + \frac{\partial K_0}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial q_{i-1}}{\partial x_{i-1}})^*\psi_i(t_i\right), \quad i = \overline{2, m-1}. \tag{15}$$

Из (4) и (12) получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi_1(t), \delta_1(t)\rangle \equiv 0.$$

Интегрируя это тождество на отрезке $[t_1, t_2]$, получим

$$\langle\psi_1(t_2), \delta_1(t_2)\rangle - \langle\psi_1(t_1), \delta_1(t_1)\rangle = 0,$$

$$\langle\psi_1(t_2), \Phi_1(t_2)a\rangle = \left\langle\frac{\partial K_0}{\partial x_1}, a\right\rangle. \tag{16}$$

Аналогично,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi_i(t), \delta_i(t)\rangle \equiv 0, \quad i = \overline{2, m}.$$

Интегрируя эти тождества, соответственно, на отрезках $[t_i, t_{i+1}], i = \overline{2, m-1}$ имеем

$$\langle\psi_i(t_{i+1}), \delta_i(t_{i+1})\rangle - \langle\psi_i(t_i), \delta_i(t_i)\rangle = 0. \tag{17}$$

Из (16) при $i = 2$ и учитывая соотношение (17) при $i = 2$, а также условие трансверсальности "в стыке"(15) при $i = 2$, получим

$$\langle \psi_2(t_3), \delta_2(t_3) \rangle = \langle \psi_2(t_2), \delta_2(t_2) \rangle,$$

$$\left\langle \psi_2(t_3), \Phi_2(t_3) \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \Phi_1(t_2) a \right\rangle = \left\langle \psi_2(t_2), \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \delta_1(t_2) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1} \right)^* \psi_2(t_2), \delta_1(t_2) \right\rangle = \\ = \left\langle \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1} \right)^* \psi_2(t_2), \Phi_1(t_2) a \right\rangle;$$

$$\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_2}, \delta_1(t_2) \right\rangle = \langle -\psi_1(t_2), \Phi_1(t_2) a \rangle + \left\langle \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1} \right)^* \psi_2(t_2), \Phi_1(t_2) a \right\rangle,$$

откуда

$$\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_2}, \delta_1(t_2) \right\rangle = \langle -\psi_1(t_2), \Phi_1(t_2) a \rangle + \left\langle \psi_2(t_3), \Phi_2(t_3) \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \Phi_1(t_2) a \right\rangle. \tag{18}$$

Аналогичные преобразования будут на всех внутренних отрезках. Для последнего отрезка времени $[t_{m-1}, t_m]$ имеем:

$$\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_{m-1}}, \delta_{m-2}(t_{m-1}) \right\rangle = \left\langle -\psi_{m-2}(t_{m-1}), \Phi_{m-2}(t_{m-1}) \frac{\partial q_{m-3}}{\partial x_{m-3}} \cdot \ldots \cdot \Phi_1(t_2) a \right\rangle + \\ \left\langle \psi_{m-1}(t_m), \Phi_{m-1}(t_m) \frac{\partial q_{m-2}}{\partial x_{m-2}} \Phi_{m-2}(t_{m-1}) \cdot \ldots \cdot \Phi_1(t_2) a \right\rangle. \tag{19}$$

Подставляя формулы (16), (18), (19) в неравенство (11), получим

$$\langle \psi_1(t_2), \Phi_1(t_2) a \rangle + \langle -\psi_1(t_2), \Phi_1(t_2) a \rangle + \left\langle \psi_2(t_3), \Phi_2(t_3) \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \Phi_1(t_2) a \right\rangle + \\ + \ldots + \left\langle -\psi_{m-2}(t_{m-1}), \Phi_{m-2}(t_{m-1}) \frac{\partial q_{m-3}}{\partial x_{m-3}} \cdot \ldots \cdot \Phi_1(t_2) a \right\rangle + \\ \left\langle \psi_{m-1}(t_m), \Phi_{m-1}(t_m) \frac{\partial q_{m-2}}{\partial x_{m-2}} \Phi_{m-2}(t_{m-1}) \cdot \ldots \cdot \Phi_1(t_2) a \right\rangle + \\ + \left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_m}, \Phi_{m-1}(t_m) \frac{\partial q_{m-2}}{\partial x_{m-2}} \Phi_{m-2}(t_{m-1}) \cdot \ldots \cdot \Phi_1(t_2) a \right\rangle \geqslant 0$$

Откуда

$$\left\langle \psi_{m-1}(t_m) + \frac{\partial K_0}{\partial x_m}, \Phi_{m-1}(t_m) \frac{\partial q_{m-2}}{\partial x_{m-2}} \Phi_{m-2}(t_{m-1}) \cdot \ldots \cdot \Phi_1(t_2) a \rangle \right\rangle \geqslant 0$$

Используя произвольность вектора a, из последнего неравенства имеем:

$$(\Phi_1(t_2))^* \cdot \ldots \cdot (\Phi_{m-2}(t_{m-1}))^* \left(\frac{\partial q_{m-2}}{\partial x_{m-2}} \right)^* (\Phi_{m-1}(t_m))^* \left(\psi_{m-1}(t_m) + \frac{\partial K_0}{\partial x_m} \right) = 0.$$

Тогда, в силу невырожденности матриц Φ_i, $\overline{1,m-1}$ и отображений $q_i, i=\overline{1,m-2}$, получим искомое условие трансверсальности в граничной точке t_m

$$\psi_{m-1}(t_m) = -\frac{\partial K_0}{\partial x_m}.$$

Докажем теперь , что для п.в. t выполнены условия максимума функции Понтрягина

$$H_i(t, u_i^*(t)) = \sup_{u_i \in U_i(t)} H_i(t, u_i), \quad i = \overline{1, m-1}, \tag{20}$$

где

$$H_i(t, x_i, u_i, \psi_i) = \langle f_i(t, x_i, u_i), \psi_i \rangle, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения:

$$H_i(t, u_i) = H_i(t, x_i^*(t), u_i, \psi_i(t)), \quad i = \overline{1, m-1},$$

$$H_i(t) = H_i(t, u_i^*(t)), \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Доказательство основано на применении игольчатых вариаций. Рассмотрим произвольно номер k от 1 до m и, соответственно, два соседних отрезка $[t_{k-1}, t_k]$ и $[t_k, t_{k+1}]$. Докажем, что на них выполнены условия максимума. Получим сначала условие максимума на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$. Возьмём такое счётное множество измеримых селекторов $\{v_i^{k-1}\}$ многозначного отображения U_{k-1}, что множество $\{v_i^{k-1}\}_{i=1}^{\infty}$ всюду плотно в $U_{k-1}(t)$ для п.в. t. Каждую из функций v_i^{k-1} будем предполагать существенно ограниченной на $[t_{k-1}, t_k]$.

Докажем (20) при $i = k-1$ для произвольной точки $\tau \in (t_{k-1}, t_k)$, для которой выполнены следующие условия: точка τ является точкой Лебега функций

$$f_{k-1}(t, x_{k-1}, u_{k-1}), \quad f_{k-1}(t, x_{k-1}, v_i^{k-1}), \quad i = 1, 2, \cdots$$

и множество точек $\{v_i^{k-1}(\tau)\}$ всюду плотно в $U_{k-1}(\tau)$.

Зафиксируем номер i и число $\alpha > 0$. Рассмотрим управление

$$u_i^{k-1}(t, \alpha) = \begin{cases} u_{k-1}^*(t), \ t \notin [\tau - \alpha, \tau], \\ v_i^{k-1}(t), \ t \in (\tau - \alpha, \tau), \end{cases}$$

— игольчатую вариацию управления u_{k-1}^*.

Через $x_{k-1}(t, \alpha)$ обозначим решение системы

$$\dot{x}_{k-1}(t) = f_{k-1}(t, x_{k-1}(t), u_{k-1}(t)),$$

соответствующее управлению $u_i^{k-1}(\cdot, \alpha)$ и удовлетворяющее начальному условию $x_{k-1}(t_{k-1}, \alpha) = x_{k-1}^*$. При малых α это решение существует на всем отрезке $[t_{k-1}, t_k]$. Так как τ является точкой Лебега соответствующих функций, имеем:

$$x_{k-1}(\tau, \alpha) = x_{k-1}(\tau - \alpha) + \alpha f_{k-1}\left(\tau, x_{k-1}^*(\tau), v_i^{k-1}(\tau)\right) + o(\alpha),$$

$$x_{k-1}^*(\tau) = x_{k-1}^*(\tau - \alpha) + \alpha f_{k-1}\left(\tau, x_{k-1}^*(\tau), u_{k-1}^*(\tau)\right) + o(\alpha),$$

Следовательно,

$$x_{k-1}(\tau, \alpha) - x_{k-1}^*(\tau) = x_{k-1}(\tau - \alpha) - x_{k-1}^*(\tau - \alpha) + \\ + \alpha\left(f_{k-1}\left(\tau, x_{k-1}^*(\tau), v_i^{k-1}(\tau)\right) - f_{k-1}\left(\tau, x_{k-1}^*(\tau), u_{k-1}^*(\tau)\right)\right).$$

Тогда предел

$$y_{k-1}(\tau) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \left(x_{k-1}(\tau,\alpha) - x^*_{k-1}(\tau)\right)$$

существует и равен

$$y_{k-1}(\tau) = f_{k-1}(\tau, v_i^{k-1}(\tau)) - f_{k-1}\left(\tau, u^*_{k-1}(\tau)\right). \tag{21}$$

На отрезке $[\tau, t_k]$ обе функции x^*_{k-1} и $x_{k-1}(\cdot,\alpha)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\dot{x}_{k-1}(t) = f_{k-1}(t, x_{k-1}(t), u_{k-1}(t)).$$

В силу теоремы о дифференцируемости решения дифференциального уравнения по начальным условиям функции $x_{k-1}(\cdot,\alpha)$ равномерно сходятся при $\alpha\to 0$ к x^*_{k-1} и предел

$$y_{k-1}(t) = \lim_{\alpha\to 0+} \frac{1}{\alpha}(x_{k-1}(t,\alpha) - x^*_{k-1}(t))$$

существует при всех $t \geqslant \tau$. При всех $t > \tau$ имеем

$$x_{k-1}(\tau,\alpha) = x^*_{k-1}(\tau) + \int_\tau^t f_{k-1}\left(\vartheta, x_{k-1}(\vartheta,\alpha), u^*_{k-1}(\vartheta)\right) \mathrm{d}\vartheta,$$

$$x^*_{k-1}(t) = x^*_{k-1}(\tau) + \int_\tau^t f_{k-1}\left(\vartheta, x_{k-1}(\vartheta), u^*_{k-1}(\vartheta)\right) \mathrm{d}\vartheta,$$

откуда получаем

$$y_{k-1}(t) = y_{k-1}(\tau) + \int_\tau^t \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_{k-1}}(\vartheta) y_{k-1}(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta.$$

Значит на $[\tau, t_k]$ функция y_{k-1} удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}_{k-1} = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_{k-1}}\left(t, x^*_{k-1}(t), u^*_{k-1}(t)\right) y_{k-1}. \tag{22}$$

Для п.в. $t > \tau$ имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi_{k-1}(t), y_{k-1}(t)\rangle = \langle\dot{\psi}_{k-1}(t), y_{k-1}(t)\rangle + \langle\psi_{k-1}(t), \dot{y}_{k-1}(t)\rangle =$$
$$= \left\langle -\frac{\partial f^*_{k-1}}{\partial x_{k-1}}(t)\psi_{k-1}(t), y_{k-1}(t)\right\rangle + \left\langle \psi_{k-1}(t), \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_{k-1}}(t) y_{k-1}(t)\right\rangle = 0.$$

т.е.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi_{k-1}(t), y_{k-1}(t)\rangle = 0.$$

Интегрируем полученное равенство на $[\tau, t_k]$

$$\langle\psi_{k-1}(t_k), y_{k-1}(t_k)\rangle - \langle\psi_{k-1}(\tau), y_{k-1}(\tau)\rangle = 0.$$

Используя условие трансверсальности «в стыке» (5), получим

$$\langle \psi_{k-1}(\tau), y_{k-1}(\tau)\rangle = \left\langle -\frac{\partial K_0}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}}\right)^* \psi_k(t_k), y_{k-1}(t_k)\right\rangle.$$

Из (21) имеем

$$\langle \psi_{k-1}(\tau), f_{k-1}(\tau, v_i^{k-1}(\tau)) - f_{k-1}(\tau, u_{k-1}^*(\tau))\rangle = \\ = \left\langle -\frac{\partial K_0}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}}\right)^* \psi_k(t_k), y_{k-1}(t_k)\right\rangle. \quad (23)$$

Так как в рассматриваемой задаче минимум равен K_0^*, имеем неравенство

$$\lim_{\alpha\to 0}(K_0(x_1^*, \ldots, x_{k-1}(t_{k-1},\alpha), x_k(t_k,\alpha), \cdots, x_m(t_m,\alpha)) - \\ - K_0(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, x_k^*, \cdots, x_m^*)) \geqslant 0.$$

Вычисляя этот предел, получаем:

$$\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_k}, y_{k-1}(t_k)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_{k+1}}, \delta_k(t_{k+1})\right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_{k+2}}, \delta_{k+1}(t_{k+2})\right\rangle + \ldots + \\ + \left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_{m-1}}, \delta_{m-2}(t_{m-1})\right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_m}, \delta_{m-1}(t_m)\right\rangle \geqslant 0. \quad (24)$$

Здесь $\delta_k(t_{k+1})$ — решение уравнения в вариациях

$$\begin{cases} \dot{\delta}_k(t) = \dfrac{\partial f_k}{\partial x_k}(t)\delta_k(t), \\ \delta_k(t_k) = \dfrac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}} y_{k-1}(t_k). \end{cases}$$

для k-й из систем (1). Здесь Φ_k — фундаментальная матрица данной системы, $\Phi_k(t_k)$ — единичная матрица и $\delta_k(t_{k+1}) = \Phi_k(t_{k+1})\dfrac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}} y_{k-1}(t_k)$. Аналогично случаю для ψ_{k-1}, для ψ_k выполнено равенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \psi_k(t), \delta_k(t)\rangle = 0,$$

интегрируя которое на $[t_k, t_{k+1}]$, получим $\langle \psi_k(t_{k+1}), \delta_k(t_{k+1})\rangle = \langle \psi_k(t_k), \delta_k(t_k)\rangle$

$$\left\langle \psi_k(t_{k+1}), \Phi_k(t_{k+1})\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}} y_{k-1}(t_k)\right\rangle = \left\langle \psi_k(t_k), \frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}} y_{k-1}(t_k)\right\rangle = \\ = \left\langle \left(\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}}\right)^* \psi_k(t_k), y_{k-1}(t_k)\right\rangle. \quad (25)$$

Учитывая условие трансверсальности в точке t_{k+1} и (25), имеем

$$\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_{k+1}}, \delta_k(t_{k+1})\right\rangle = \left\langle -\psi_k(t_{k+1}), \Phi_k(t_{k+1})\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}} y_{k-1}(t_k)\right\rangle +$$

$$+\left\langle \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\right)^* \psi_{k+1}(t_{k+1}), \Phi_k(t_{k+1})\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}} y_{k-1}(t_k)\right\rangle =$$

$$=\left\langle -\left(\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}}\right)^* \psi_k(t_k), y_{k-1}(t_k)\right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\right)^* \psi_{k+1}(t_{k+1}), \Phi_k(t_{k+1})\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}} y_{k-1}(t_k)\right\rangle .$$

Используя аналогичные преобразования для соответствующих индексов, получим:

$$\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_{k+2}}, \delta_{k+1}(t_{k+2})\right\rangle = -\left\langle \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\right)^* \psi_{k+1}(t_{k+1}), \Phi_k(t_{k+1})\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}} y_{k-1}(t_k)\right\rangle +$$
$$+\left\langle \left(\frac{\partial q_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\right)^* \psi_{k+1}(t_{k+1}), \Phi_{k+1}(t_{k+2})\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\Phi_k(t_{k+1})\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}} y_{k-1}(t_k)\right\rangle ,$$

$$\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_{m-1}}, \delta_{m-2}(t_{m-1})\right\rangle = -\left\langle \psi_{m-2}(t_{m-1}), \delta_{m-2}(t_{m-1})\right\rangle +$$
$$+\left\langle \left(\frac{\partial q_{m-2}}{\partial x_{m-2}}\right)^* \psi_{m-1}(t_{m-1}), \delta_{m-2}(t_{m-1})\right\rangle .$$

Используя (25) и условие трансверсальности в правой граничной точке, получим

$$\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_m}, \delta_{m-1}(t_m)\right\rangle = -\left\langle \psi_{m-1}(t_m), \delta_{m-1}(t_m)\right\rangle =$$
$$=\left\langle -\psi_{m-1}(t_{m-1}), \frac{\partial q_{m-2}}{\partial x_{m-2}}\delta_{m-2}(t_{m-1})\right\rangle .$$

Подставляя полученные равенства в неравенство (24), проведя попарное уничтожение соответствующих слагаемых и воспользовавшись условием трансверсальности в точке t_{k+1} имеем

$$\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_k}, y_{k-1}(t_k)\right\rangle + \left\langle -\left(\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}}\right)^* \psi_k(t_k), y_{k-1}(t_k)\right\rangle =$$
$$=\left\langle \frac{\partial K_0}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial q_{k-1}}{\partial x_{k-1}}\right)^* \psi_k(t_k), y_{k-1}(t_k)\right\rangle = \left\langle \psi_{k-1}(t_k), y_{k-1}(t_k)\right\rangle \geqslant 0.$$

Используя (21), получим

$$-\left\langle \psi_{k-1}(\tau), f_{k-1}\left(\tau, v_i^{k-1}(\tau)\right) - f_{k-1}\left(\tau, u_{k-1}^*(\tau)\right)\right\rangle \geqslant 0,$$

откуда

$$\left\langle \psi_{k-1}(\tau), f_{k-1}\left(\tau, u_{k-1}^*(\tau)\right)\right\rangle \geqslant \left\langle \psi_{k-1}(\tau), f_{k-1}\left(\tau, v_i^{k-1}(\tau)\right)\right\rangle ,$$
$$H_{k-1}\left(\tau, u_{k-1}^*(\tau)\right) \geqslant H_{k-1}\left(\tau, v_i^{k-1}(\tau)\right).$$

Последнее неравенство доказано для любого номера i. Из него вытекает условие максимума в точке τ, так как по построению последовательность $\{v_i^{k-1}\}_{i=1}^{\infty}$ всюду плотна во множестве $U_{k-1}(\tau)$.

Теперь докажем условие максимума справа от точки t_k, на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$. Если этот отрезок не является последним, то доказательство проводится аналогично предыдущему случаю с использованием условий трансверсальности «в стыке» и в условия трансверсальности в правой граничной точке. Если же этот отрезок является последним, то в доказательстве используется лишь условие трансверсальности в точке t_m. Проводя аналогичные рассуждения справа от точки t_k, получим, что на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ также выполнено условие максимума функции Понтрягина. Полученный результат завершает доказательство теоремы. □

Литература

1. *Арутюнов А. В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. — М.: Факториал, 1997. [*Arutyunov A. V.* Usloviya ehkstremuma. Anormaljnihe i vihrozhdennihe zadachi. — M.: Faktorial, 1997.]
2. *Болтянский В. Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. XIX, № 3. — С. 518–521. [*Boltyanskiyj V. G.* Zadacha optimizacii so smenoyj fazovogo prostranstva // Differencialjnihe uravneniya. — 1983. — T. XIX, No 3. — S. 518–521.]
3. *Медведев В. А., Розова В. Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами // Автоматика и телемеханика. — 1972. — Т. 3. — С. 15–23. [*Medvedev V. A., Rozova V. N.* Optimaljnoe upravlenie stupenchatihmi sistemami // Avtomatika i telemekhanika. — 1972. — T. 3. — S. 15–23.]

UDC 517.977

Necessary Optimality Conditions in the Problem with Phase Space Change

I. S. Maksimova

Department of Nonlinear Analysis and Optimization
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

Necessary optimality conditions are obtained for the optimal control problem with phase space change. Phase space change is caused by existence of several controlled objects. These problems have applications both in physics and economics.

Key words and phrases: optimal control problem, phase space change.