Математика

УДК 517.977

Необходимые условия экстремума для 2-нормальных процессов

Н. Г. Павлова

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия

В статье исследуется управляемая система с импульсными управлениями в окрестности анормальной точки. Вводится понятие 2-нормальности, которое играет большую роль при выводе необходимых условий первого и второго порядка для задачи оптимального управления. В статье приводятся достаточные условия 2-нормальности. Исследована близость между необходимыми и достаточными условиями экстремума для 2-нормальных траекторий.

Ключевые слова: оптимальное управление, импульсное управление, условие 2-нормальности.

При выводе необходимых условий первого и второго порядка для задачи оптимального управления, заключающейся в минимизации некоторого функционала на множестве допустимых процессов управляемой системы, большую роль играют понятия регулярности и 2-нормальности в рассматриваемой точке. Поясним суть этих определений для абстрактного отображения F, действующего из заданного банахова пространства Z в $\mathbb{R}^k$.

Пусть $\hat{z}$ — заданная точка из Z, и отображение F дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности $\hat{z}$.

Определение 1. Отображение F называется регулярным (нормальным) в точке $\hat{z}$, если

$$\mathrm{im} F'(\hat{z}) = \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

где im — образ линейного оператора.

Известно, что если отображение F регулярно в точке $\hat{z}$, то для него справедлива теорема об обратной функции. Кроме того, для задачи минимизации

$$f_0(z) \to \min, F(z) = 0, \tag{2}$$

где f_0 — заданная гладкая функция, справедлив принцип Лагранжа (при $\lambda_0 = 1$), а также необходимые условия второго порядка. Если же точка $\hat{z}$ является анормальной, т.е. $\mathrm{im} F'(\hat{z}) \neq \mathbb{R}^k$, то утверждение классической теоремы о неявной функции, как известно, может не выполняться.

Аналогично, в задаче минимизации (2) принцип Лагранжа является неинформативным, то есть выполняется при $\lambda_0 = 0$ (независимо от минимизируемой функции f_0), а классические необходимые условия второго порядка могут не выполняться.

Таким образом возникает проблема нахождения условия, более тонкого, чем условие (1), но которое бы гарантировало локальную разрешимость уравнения $F(z) = y$ для всех z, близких к точке $\hat{y} = F(\hat{z})$, а также наличие содержательных необходимых условий первого и второго порядка в задаче (2). Это условие известно и называется условием 2-нормальности (см. [1]). Приведём это условие.

Статья поступила в редакцию 5 ноября 2008 г.

Обозначим через $\mathbb{F}_2(\hat{z})$ конус, состоящий из таких $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\lambda \neq 0$, что $F'(\hat{z})^*\lambda = 0$ и в Z существует линейное подпространство $\Pi = \Pi(\lambda)$:

$$\Pi \subseteq \mathrm{Ker F'(\hat{z})}, \quad \mathrm{codim}\Pi \leqslant \mathrm{k};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\langle \lambda, \Phi(\hat{z}) \right\rangle [z, z] \geqslant 0 \quad \forall\, z \in \Pi.$$

Сразу же отметим, что конус $\mathbb{F}_2(\hat{z})$ может оказаться пустым. Он, например, заведомо пуст, если отображение Φ нормально в точке $\hat{z}$, так как из (1) вытекает, что $F'(\hat{z})^*\lambda \neq 0\ \forall\, \lambda \neq 0$. Кроме того, после присоединения к этому конусу нуля он становится замкнутым, но вовсе не обязан стать выпуклым.

Определение 2. [1] Отображение F называется 2-нормальным в точке $\hat{z}$, если конус $\mathrm{conv}\mathbb{F}_2(\hat{\mathrm{z}})$ является острым, т.е. не содержит ненулевых подпространств (случай $\mathbb{F}_2(\hat{z}) = \emptyset$ не исключается, так как пустой конус острый по определению).

Как известно [2], 2-нормальность отображения F 2-регулярно в точке $\hat{z}$, гарантирует разрешимость уравнения $F(z) = y$ для всех y, достаточно близких к $\hat{y} = F(\hat{z})$. Кроме того, в задаче (2) справедливы некоторые необходимые условия первого и второго порядка, содержательные и в анормальном случае (т.е. когда $\mathrm{im}F'(\hat{z}) \neq \mathbb{R}^k$).

В настоящей работе условие 2-нормальности расшифровывается применительно к управляемым системам.

Рассмотрим задачу оптимального импульсного управления

$$J = J(x_1, u, \mu) = W_0(x_1, x_2) + \int\limits_{t_1}^{t_2} f^0(x(t), u(t), t)\mathrm{d}t + \int\limits_{[t_1, t_2]} g^0(t)\mathrm{d}\mu(t) \to \min, \tag{3}$$

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t), u(t), t)\mathrm{d}t + G(t)\mathrm{d}\mu(t), \quad t \in [t_1, t_2], \tag{4}$$

$$x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \tag{5}$$

$$W(x_1, x_2) = 0, \quad \mu \in \mathbb{K}. \tag{6}$$

Здесь $t \in [t_1, t_2]$ — время, $t_1 < t_2$ заданы, x — фазовая переменная, принимающая значения в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ — управление, f — n-мерная, g^0 — k-мерная, G — $n \times k$-мерная, а W — w-мерная вектор-функции (k, n, m, w — натуральные числа), W_0 и f^0 — скалярные функции. Функции W_0 и W предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми, функции f^0 и f — дважды дифференцируемыми по x и u для п.в. $t \in [t_1, t_2]$, а функции g^0 и G — непрерывными.

Положим

$$\mathbb{K} = \Big\{ \mu \in C^* \left([t_1, t_2]; \mathbb{R}^k \right) : \forall \text{ непрер. } \varphi : \varphi(t) \in K^* \quad \forall\, t,$$
$$\int\limits_B \varphi(t)\mathrm{d}\mu \geqslant 0 \quad \forall \text{ борел. } B \subset [t_1, t_2] \Big\},$$

где $K \subseteq \mathbb{R}^k$ — заданный острый выпуклый замкнутый конус, K^* — его сопряжённый. Другими словами, μ — k-мерная мера Бореля, такая, что $\mu(B) \subset K$ для любого борелевского множества B.

В качестве класса допустимых управлений рассматривается множество пар $(u, \mu):\ \mu \in \mathbb{K}$, $u \in L^m_\infty[t_1, t_2]$.

Тройка $(x(t), u(t), \mu(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, называется допустимым процессом, если $(u(\cdot), \mu(\cdot))$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующее ему решение уравнения (4), удовлетворяющее концевым ограничениям (5), (6):

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau)\mathrm{d}\tau + \int_{[t_1,t]} G(\tau)\mathrm{d}\mu(\tau) \quad \forall \quad t \in [t_1, t_2].$$

Определим на множествах $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{1+w}$ гамильтониан и малый лагранжиан по формулам

$$H(x, u, t, \psi, \lambda^0) = \langle f(x, u, t), \psi\rangle - \lambda^0 f^0(x, u, t),$$

$$l(x_1, x_2, \lambda) = \lambda^0 W_0(x_1, x_2) + \left\langle \lambda^1, W(x_1, x_2)\right\rangle, \quad \lambda = (\lambda^0, \lambda^1).$$

Здесь $\lambda^0 \in \mathbb{R}^1$, $\lambda^1 \in \mathbb{R}^w$, а ψ — n-мерный вектор-столбец. Пусть $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ — заданный допустимый процесс.

Определение 3. Процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа, если существует такой вектор $\lambda \neq 0$, что $\lambda^0 \geqslant 0$ и для вектор-функции ψ, являющейся решением задачи Коши

$$\dot{\psi} = -\partial H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t))/\partial x, \quad \psi(t_1) = \partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)/\partial x_1, \tag{7}$$

имеет место

$$\begin{gathered} \partial H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t), \lambda^0)/\partial u = 0 \quad \text{для п.в.}\, t \in [t_1, t_2], \\ \psi(t_2) = -\partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)/\partial x_2, \\ \langle \psi(t), G(t)v\rangle - \lambda^0 \left\langle g^0(t), v\right\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in K, \quad \forall t \in [t_1, t_2], \\ \langle \psi(t), G(t)\hat{v}(t)\rangle - \lambda^0 \left\langle g^0(t), \hat{v}(t)\right\rangle = 0 \quad \text{для } \hat{\mu} - \text{п.в.} \quad t \in [t_1, t_2]. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\hat{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\hat{\mu}}{\mathrm{d}|\hat{\mu}|}(t)$ — производная Радона–Никодима, $\hat{x}_1 = \hat{x}(t_1)$, $\hat{x}_2 = \hat{x}(t_2)$.

Обозначим через $\Lambda(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ множество векторов λ, которые отвечают заданной экстремали $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ в силу уравнений Эйлера–Лагранжа.

Если конус Λ не содержит элемент вида $(0, \lambda^1)$ (т.е. элемент с $\lambda^0 = 0$), то задача называется нормальной. В противном случае задачу называют анормальной и для неё необходимые условия первого порядка выполняются тривиально. При этом классические необходимые условия второго порядка (см. теорему 1), вообще говоря, неверны.

Для формулировки условий второго порядка для процесса $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ введём в рассмотрение систему уравнений в вариациях

$$\mathrm{d}(\delta x) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta x \mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta u(t)\mathrm{d}t + G(t)\mathrm{d}(\delta\mu)(t). \tag{9}$$

Здесь $\delta u \in L^m_\infty[t_1, t_2]$, $\delta\mu \in \mathbb{T}_{\mathbb{K}}(\hat{\mu})$, а решение уравнения в вариациях должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\delta x(t_1) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\delta x(t_2) = 0. \tag{10}$$

Пусть $\lambda \in \Lambda(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$. На пространстве $V = R^n \times L^m_\infty[t_1, t_2]$ пар $(\zeta, \delta u)$ определим квадратичную форму Ω_λ формулой

$$\Omega_\lambda(\zeta,\delta u)=\frac{\partial^2 l}{\partial(x_1,x_2)^2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\lambda)\,[(\delta x(t_1),\delta x(t_2)),(\delta x(t_1),\delta x(t_2))]-$$
$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 H}{\partial(x,u)^2}(\hat{x},\hat{u},t,\psi)\,[(\delta x(t),\delta u(t)),(\delta x(t),\delta u(t))]\,\mathrm{d}t.$$

Здесь и далее δx — соответствующее $(\delta u,\delta\mu)$ решение системы уравнений в вариациях (9) с начальным условием $\delta x(t_1)=\zeta$.

Через $\mathcal{X}$ обозначим линейное подпространство $X=R^n\times L^m_\infty[t_1,t_2]\times C^*$, состоящее из всех тех $(\zeta,\delta u,\delta\mu)$, что решение системы (9) δx удовлетворяет граничным условиям (10). Для произвольного целого неотрицательного числа r через $\Lambda_r=\Lambda_r(\hat{x},\hat{u},\hat{\mu})$ обозначим множество тех $\lambda\in\Lambda(\hat{x},\hat{u},\hat{\mu})$, для которых индекс сужения формы Ω_λ на подпространство $\mathcal{X}$ не превышает r.

Пусть Φ — фундаментальная матрица системы уравнений в вариациях (9), т.е. Φ является решением однородной системы

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi=\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\Phi,\quad \Phi(t_1)=I,$$

Обозначим через d размерность ядра блочной матрицы $(Z_1^*Z_2^*)$, где

$$Z_1=\frac{\partial W}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)+\Phi(t_2)\frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2),$$

$$Z_2=\frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)^*\Phi(t_2)^*\int\limits_{t_1}^{t_2}\Phi^{-1}(t)^*\frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)^*\frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\Phi^{-1}(t)\mathrm{d}t\times$$
$$\times\Phi(t_2)\frac{\partial W}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2).$$

Приведём необходимые условия слабого локального минимума, полученные в [2].

Теорема 1. *Пусть допустимый процесс $(\hat{x},\hat{u},\hat{\mu})$ является слабым локальным минимумом в задаче (3)–(6). Тогда $\Lambda_d\neq\varnothing$ и для $(\zeta,\delta u,\delta\mu)\in\mathcal{X}$, таких, что*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\left\langle\delta x(t),\frac{\partial f^0}{\partial x}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\right\rangle+\left\langle\delta u(t),\frac{\partial f^0}{\partial u}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)\right\rangle\right]\mathrm{d}t+$$
$$+\int\limits_{[t_1,t_2]}\langle g^0(t),\delta\hat{\mu}\rangle+\left\langle\frac{\partial W_0}{\partial(x_1,x_2)}(\hat{x}_1,\hat{x}_2),(\delta x(t_1),\delta x(t_2))^T\right\rangle\leqslant 0,$$

имеет место

$$\max_{\lambda\in\Lambda_d,|\lambda|=1}\Omega_\lambda(\zeta,\delta u)\geqslant 0. \tag{11}$$

Если экстремаль $(\hat{x},\hat{u},\hat{\mu})$ нормальна, то конус $\Lambda(\hat{x},\hat{u},\hat{\mu})$ содержит единственный единичный вектор λ и теорема 1 гарантирует неотрицательность формы Ω_λ на $\mathcal{X}$, а это и есть классические необходимые условия второго порядка. Если же экстремаль анормальна, то может не существовать такого $\lambda\in\Lambda(\hat{x},\hat{u},\hat{\mu})$, что форма Ω_λ неотрицательна на $\mathcal{X}$.

Пример 1. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$x_1(1)\to\min,$$

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = \overline{1,4}$$

$$\dot{x}_5 = x_1u_1 + x_2u_2 - x_3u_3 - x_4u_4, \quad t \in [0,1],$$

$$x_i(0) = 0, \quad i = \overline{1,5}, \quad x_5(1) = 0.$$

Здесь $t \in [0,1]$ — время, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ — фазовая переменная, $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ — управление.

В качестве класса допустимых управлений рассматривается множество измеримых существенно ограниченных функций $u \in L_\infty^m[t_1, t_2]$.

Определим гамильтониан и малый лагранжиан по формулам

$$H(x,u,t,\psi) = \psi_1u_1 + \psi_2u_2 + \psi_3u_3 + \psi_4u_4 + \psi_5(x_1u_1 + x_2u_2 - x_3u_3 - x_4u_4),$$

$$l(x_1,x_2,\lambda) = \lambda^0x_1(1) + \lambda_1^1x_1(0) + \lambda_2^1x_2(0) + \lambda_3^1x_3(0) + \lambda_4^1x_4(0) + \lambda_5^1x_5(0) + \lambda_6^1x_5(1),$$

$$\lambda = (\lambda^0, \lambda^1).$$

Здесь $\lambda^0 \in \mathbb{R}^1$, $\lambda^1 \in \mathbb{R}^6$, а ψ — 5-мерный вектор-столбец.

Исследуем на экстремум анормальные процессы $(x(\cdot), u(\cdot)) = (0,0)$. Классические необходимые условия выполняются на нем с $\psi_i \equiv 0$, $i = \overline{1,4}$, $\psi_5 \equiv const$.

Система в вариациях имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x_i = \delta u_i, \quad i = \overline{1,4}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x_5 = 0.$$

Выпишем вторую вариацию

$$\Omega_\lambda(\delta u) = \psi_5 \int_0^1 (\delta x_1\delta u_1 + \delta x_2\delta u_2 - \delta x_3\delta u_3 - \delta x_4\delta u_4)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\psi_5}{2}\int_0^1 \left((\dot{\delta x_1^2}) + (\dot{\delta x_2^2}) - (\dot{\delta x_3^2}) - (\dot{\delta x_4^2})\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\psi_5}{2}\left(\delta x_1^2(1) + \delta x_2^2(1) - \delta x_3^2(1) - \delta x_4^2(1)\right).$$

Отсюда следует, что классические необходимые условия второго порядка для этой задачи не выполняются.

Пример 2. Обозначим через $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ билинейное симметричное отображение, удовлетворяющее двум условиям:

a) существует $y \in \mathbb{R}^k$: $Q(x) \neq y \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $Q(x) = Q[x,x]$;

b) не существует такого ненулевого вектора $\lambda \in \mathbb{R}^k$, что $\langle \lambda, Q(x)\rangle \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(Примером отображения, удовлетворяющего условиям a), b), является отображение $Q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Q[x,y] = (x_1y_2, x_2y_3, x_3, y_1)$.)

Выберем любое $a \notin Q(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим задачу

$$z(0) \to \min, \quad \dot{x} = zu, \quad \dot{y} = z(2Q[x,u] + a), \quad \dot{z} = 0, \quad t \in [0,1],$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = -a, \quad y(1) = 0.$$

Здесь $x, u \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^1$. Тогда

$$y(1) = -a + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}zQ[x,x]\mathrm{d}t + za = a(z-1) + zQ[x(1),x(1)] = 0.$$

Но так как $a \notin Q(\mathbb{R}^n)$, то из последнего соотношения следует, что $z = 1$. Значит, процесс $(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t), \hat{u}(t)) = (0, ta, 1, 0)$ является решением задачи.

Определим гамильтониан $H = \psi_1 zu + \psi_2 z(2Q[x,u] + a)$. Из условия стационарности (8) имеем $\psi_1 \equiv 0$, а в силу (7) $\psi_2 \equiv const$. Система в вариациях имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x = \delta u, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta y = \delta z\, a, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta z = 0.$$

Выпишем вторую вариацию

$$\Omega_\lambda(\delta u) = 2\int\limits_0^1 \psi_2 Q[\delta x, \delta u]\mathrm{d}t = 2\psi_2 \int\limits_0^1 Q\left[\delta x, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x\right]\mathrm{d}t = \psi_2 Q[\delta x(1), \delta x(1)].$$

Из условия b) следует, что квадратичная форма Ω_λ не будет неотрицательно определена ни для какого $\psi_2 \neq 0$. Это значит, что классические необходимые условия второго порядка для этой задачи не выполняются.

Пусть экстремаль $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ анормальна (т.е. $d > 0$). Тогда если $conv\,\Lambda_d$ — выпуклая оболочка конуса Λ_d — содержит ненулевое подпространство, то условие (11) выполняется автоматически, так как максимум зависящей от переменной λ линейной функции по множеству, содержащему одновременно два вектора $\bar{\lambda}$ и $(-\bar{\lambda})$, неотрицателен. Таким образом, если конус $conv\,\Lambda_d$ не является острым, то условие (11) содержательной информации не несёт. Выделим класс экстремалей, для которых условие (11) содержательно.

Для управляемой системы (2)–(4) определим гамильтониан и малый лагранжиан по формулам

$$\tilde{H}(x,u,t,\psi) = \langle \psi, f(x,u,t)\rangle, \quad \tilde{l}(x_1,x_2,\lambda^1) = \langle \lambda^1, W(x_1,x_2)\rangle.$$

Для допустимого процесса $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ обозначим через $\mathcal{F}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu}) = \mathcal{F}$ множество тех $\lambda^1 \in \mathbb{R}^w$, $\lambda^1 \neq 0$, для которых существует абсолютно непрерывная вектор-функция $\psi = \psi_{\lambda^1}(\cdot)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{\psi} = -\partial\tilde{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t))/\partial x, \quad \psi(t_1) = \partial\tilde{l}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda^1)/\partial\sigma, \tag{12}$$

такая, что

$$\psi(t_2) = -\partial\tilde{l}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda^1)/\partial x_2, \quad \partial\tilde{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi(t), \lambda^0)/\partial u = 0 \quad \text{для п.в.} \quad t \in [t_1, t_2],$$

$$\langle \psi(t), G(t)v\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in K, \quad \forall t \in [t_1, t_2],$$
$$\langle \psi(t), G(t)\hat{v}(t)\rangle = 0 \quad \text{для } \hat{\mu} - \text{п.в.} \quad t \in [t_1, t_2].$$

Здесь $\hat{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\hat{\mu}}{\mathrm{d}|\hat{\mu}|}(t)$ — производная Радона-Никодима, $\hat{x}_1 = \hat{x}(t_1)$, $\hat{x}_2 = \hat{x}(t_2)$.

Предположим, что $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Для $\lambda^1 \in \mathcal{F}$ определим на $\mathcal{X}$ квадратичную форму формулой

$$\tilde{\Omega}_{\lambda^1}(\zeta, \delta u, \delta\mu) = \frac{\partial^2\tilde{l}}{\partial(x_1,x_2)^2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)\left[(\delta x(t_1), \delta x(t_2)), (\delta x(t_1), \delta x(t_2))\right] -$$
$$- \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2\tilde{H}}{\partial(x,u)^2}(\hat{x}, \hat{u}, t, \psi_{\lambda^1})\left[(\delta x(t), \delta u(t)), (\delta x(t), \delta u(t))\right]\mathrm{d}t.$$

Для натурального числа r через $\mathcal{F}_{2,r}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu}) = \mathcal{F}_{2,r}$ обозначим множество тех $\lambda^1 \in \mathcal{F}$, для которых индекс сужения формы $\tilde{\Omega}_{\lambda^1}$ на подпространство $\mathcal{X}$ не превышает r.

Определение 4. Допустимый процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ называется 2-нормальным, если конус $conv\mathcal{F}_{2,r}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является острым.

Из лемм 1 и 2 из [1] естественно вытекает, что 2-нормальность в смысле определения 4 означает ни что иное как 2-нормальность введённого ранее отображения F в точке $\hat{z} = (\hat{x}_1, \hat{u}(\cdot), \hat{\mu}(\cdot))$. Приведём достаточные условия 2-нормальности, полученные в [3].

Предположим, что рассматриваемое управление $\hat{u}(t)$ является кусочно-гладким, т.е. имеет на отрезке $[t_1, t_2]$ конечное число p точек разрыва $\tau_1, \dots, \tau_p$, и на каждом из отрезков $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ оно бесконечно дифференцируемо.

Определим векторные поля $\tilde{f}(x,t)$ и $\tilde{f}_{u_i}(x,t)$ на $\mathbb{R}^{n+1}$ формулами:

$$\tilde{f} = col(f(x, \hat{u}(t), t), 1), \quad \tilde{f}_{u_i} = col(\partial f(x, \hat{u}(t), t)/\partial u_i, 0).$$

Положим $b_s^i(t) = (ad^s(\tilde{f})\tilde{f}_{u_i})(\hat{x}(t)), \quad i = \overline{1,m}$, где

$$ad^0(\tilde{f})\tilde{f}_{u_i} = \tilde{f}_{u_i}, \quad ad^s(\tilde{f})\tilde{f}_{u_i} = \frac{\partial \tilde{f}_{u_i}}{\partial x} ad^{s-1}\tilde{f} - \frac{\partial ad^{s-1}\tilde{f}}{\partial x}\tilde{f}_{u_i}.$$

Обозначим через $\mathfrak{B}_s(t)$ $(n \times m)$-матрицу со столбцами, полученными из b_s^i удалением $(n+1)$-й координаты. Для целого $s \geqslant 0$ рассмотрим систему уравнений

$$\mathrm{d}(\delta x) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta x \mathrm{d}t + (-1)^s \mathfrak{B}_s(t)\delta u(t)\mathrm{d}t + G(t)\mathrm{d}(\delta\mu)(t). \tag{13}$$

Через $\mathcal{X}_s$ обозначим линейное подпространство X, состоящее из всех тех $(\zeta, \delta u, \delta\mu)$, что решение системы (11) δx удовлетворяет граничным условиям (8). Для целого $s \geqslant 0$ на пространстве $\mathcal{X}_s$ определим квадратичную форму

$$\tilde{\Omega}^{(s)}_{\lambda^1}(\zeta, \delta u, \delta\mu) = \frac{\partial^2 \tilde{l}}{\partial(x_1, x_2)^2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)\left[(\delta x(t_1), \delta x(t_2)), (\delta x(t_1), \delta x(t_2))\right] -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{u}, t, \psi_{\lambda^1})[\delta x, \delta x] + (-1)^{s+1} \cdot 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \psi_{\lambda^1})^* \delta x, \delta u \right\rangle \right) \mathrm{d}t.$$

Положим

$$\gamma(s) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{p} ind\Delta\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}t^{j-1}}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}\right)^* \mathfrak{B}_{j-1}\right)_{\tau_i} + ind\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}t^{j-1}}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}(t_2)^* \mathfrak{B}_{j-1}(t_2)\right). \tag{14}$$

Здесь $\Delta M_\tau = M(\tau+0) - M(\tau-0)$ — скачок матрицы M в точке τ, а через $ind\, Q$ обозначен индекс квадратичной формы, определяемой симметричной матрицей Q. Отметим, что все матрицы, входящие в (12), симметричны.

Теорема 2 (Достаточные условия 2-нормальности)**.** *Пусть для некоторого r конус $conv\mathcal{F}_{2,r}$ не является острым. Тогда существует такое $\bar{\lambda}^1 \in \mathcal{F}_{2,r}$, что для любого целого $s \geqslant 0$ выполняются условия:*

1) для решения сопряжённого уравнения (10) $\bar{\psi}$, *соответствующего вектору $\bar{\lambda}^1$, имеет место*

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, \bar{\psi}(t)) = 0 \quad \forall t \notin \{\tau_1, \dots, \tau_p\};$$

2) существует такое подпространство $Y_s \subseteq \mathcal{X}_s$, что

$$codim\, Y_s \leqslant (k - \gamma(s) + 1)(r - \gamma(s)) \leqslant r(k+1)$$

и

$$\tilde{\Omega}^{(s)}_{\bar{\lambda}^1}(\zeta, \delta u, \delta\mu) = 0 \quad \forall(\zeta, \delta u, \delta\mu) \in Y_s;$$

3) $\gamma(s) \leqslant r$.

Выше было отмечено, что если конус $conv\,\Lambda_d$ в теореме 1 не является острым, то необходимое условие (9) выполняется тривиальным образом и не несёт содержательной информации. Приводимая ниже теорема показывает, что в 2-нормальном случае это не так. Оказывается, что в этом случае «зазор» между необходимыми условиями из теоремы 1 и достаточными условиями локального минимума в некотором смысле неулучшаем.

Определение 5. Допустимый процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ называется конечномерным минимумом, если для любого содержащего точку $\hat{u}$ конечномерного подпространства $R_1 \subset L_\infty^m[t_1, t_2]$ и любого содержащего точку $\hat{\mu}$ конечномерного подпространства $R_2 \subset C^*$ процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является локальным минимумом в задаче (3)–(6) с дополнительным ограничением $u(\cdot) \in R_1$, $\mu(\cdot) \in R_2$.

Поясним введённое определение. Задача (3)–(6) с дополнительным ограничением $u(\cdot) \in R_1$, $\mu(\cdot) \in R_2$ является задачей условной минимизации на конечномерном векторном подпространстве. Как известно, в произвольном конечномерном векторном пространстве существует единственная отделимая векторная топология, т.е. топология, превращающая его в отделимое векторное топологическое пространство. Рассматривая конечномерные векторные подпространства, мы считаем их наделёнными этой (единственной отделимой векторной) топологией. Именно относительно указанной топологии и подразумевается локальность минимума в участвующей в определении конечномерной задаче. Отметим, что введённый конечномерный минимум слабее других рассматривающихся в теории оптимального управления типов минимума.

Предположим, что концевые ограничения регулярны, т.е. $rank \frac{\partial W}{\partial(x_1,x_2)}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = w$.

Теорема 3. *Предположим, что допустимый процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является 2-нормальным для задачи (3)–(6) и для него выполняются необходимые условия второго порядка из теоремы 1.*

Предположим также, что матрица $\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)/\partial u$ имеет ранг m при почти всех t и существует непрерывная n-мерная функция ξ такая, что $\xi(t)G(t) \equiv 0$ и $\xi(t)\frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) = 0$ для п.в. $t \in [t_1, t_2]$. Тогда существуют такие вектор $v \in \mathbb{R}^w$ и вектор-функция $\beta(t) \in L_\infty^n[t_1, t_2]$, что для любого $\varepsilon > 0$ тройка $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ доставляет строгий конечномерный минимум в следующей возмущённой задаче:

$$W_0(x_1, x_2) + \varepsilon|(x_1, x_2) - (\hat{x}_1, \hat{x}_2)|^2 +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left(f^0(x(t), u(t), t) + \varepsilon|x(t) - \hat{x}(t)|^2\right) \mathrm{d}t + \int_{[t_1,t_2]} g^0(t)\mathrm{d}\mu(t) \to \min, \qquad (15)$$

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t), u(t), t)\mathrm{d}t + \varepsilon\beta(t)|x(t) - \hat{x}(t)|^2\mathrm{d}t + G(t)\mathrm{d}\mu(t), \quad t \in [t_1, t_2], \qquad (16)$$

$$W(x_1, x_2) + \varepsilon v|(x_1, x_2) - (\hat{x}_1, \hat{x}_2)|^2 = 0, \quad \mu \in \mathbb{K}. \qquad (17)$$

Доказательство. В силу 2-нормальности процесса $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ конус $conv\Lambda_d(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$ является острым, поэтому его поляра $(\Lambda_d(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu}))^0$ имеет непустую внутренность.

Возьмём произвольное $v \in int\,(\Lambda_d(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu}))^0$. Рассмотрим конус $E = (\lambda^0, e) : e = \partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)/\partial x_1$. Покажем, что конус $convE$ острый. Предположим противное. Тогда по теореме Каратеодори $\exists \lambda_i = (0, y_i) \in \Lambda_d(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\mu})$: $\sum_i \frac{\partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda_i)}{\partial x_1} = 0$, откуда $\frac{\partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0$, где $\lambda = \sum_i \lambda_i$, причём $\lambda^0 = 0$, $\lambda \neq 0$ в силу остроты конуса $conv\Lambda_d$. Поэтому в силу (7) и (8) $\partial l(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda)/\partial x_2 = 0$, откуда в силу регулярности концевых ограничений $\lambda = 0$. Полученное противоречие доказывает остроту конуса $convE$.

Возьмём $(\lambda^0, e) \in int(E^0)$. Пусть (β^0, β) — решение задачи Коши

$$\dot{\beta}^0 = \left\langle \frac{\partial f^0}{\partial x}(t), \beta \right\rangle, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial f}{\partial x}(t)\beta, \quad \beta^0(0) = \lambda^0, \quad \beta(0) = -e.$$

Легко видеть, что $\langle(\beta^0(t), \beta(t)), (\lambda^0, -\psi(t))\rangle \equiv C = const$ для любого решения задачи (7). Уменьшая по модулю (λ^0, e), добьёмся того, чтобы $|\beta^0(t)| < 1$. Тогда $\lambda^0 - \langle\psi(t), \beta(t)\rangle > 0 \quad \forall t$ для любого решения задачи (7). Кроме того, из полноты ранга матриц $\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)/\partial u$ и из существования функции ξ такой, что $\xi(t)G(t) \equiv 0$ и $\xi(t)\frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) = 0$ для п.в. $t \in [t_1, t_2]$ вытекает, что для решений системы (9) если $\delta x = 0$, то $\delta u = 0$. Поэтому в силу (11) для возмущённой задачи (13)–(15) выполнены достаточные условия строгого конечномерного минимума [1, теорема 7.2]. Теорема доказана. $\square$

Литература

1. *Арутюнов А. В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. — М.: Факториал, 1997.
2. *Arutyunov A., Jacimovic V., Pereira F.* Second Order Necessary Conditions for Optimal Impulsive Control Problems // J. on Dynamical and Control Systems. — 2003. — Vol. 9, No 1. — Pp. 131–153.
3. *Pavlova N.* 2-regularity and 2-normality Conditions for Systems with Impulsive Controls // Yugoslav Journal of Operations Research. — 2007. — Vol. 17, No 2. — Pp. 149–164.

UDC 517.977

Necessary Conditions of Optimality for 2-normality Systems

N. G. Pavlova

Nonlinear Analysis and Optimization Department
Peoples Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

In this paper controlled system with impulsive controls in the neighborhood of abnormal point is investigated. The concept of 2-normality which plays a greater role in the course of derivation of the first and second order necessary conditions for optimal control problem is introduced in this article. Sufficient conditions of 2-normality are obtained in this article. Besides that proximity of necessary and sufficient conditions of optimality for 2-normality systems is investigated.