УДК 515.168.5

Об эллиптичности G-трансляторов на многообразиях с изолированными особенностями

Нгуен Ле Линь

В работе рассматриваются G-трансляторы на многообразиях с изолированными особенностями, т.е. трансляторы, инвариантные относительно действия группы G. Получены условия эллиптичности G-трансляторов и теорема конечности в ситуации, когда группа G является конечной циклической группой простого порядка.

Ключевые слова: эллиптические операторы, краевые задачи для эллиптических уравнений, стратифицированные многообразия, G-транслятор.

1. Введение

При изучении задачи Соболева (относительной эллиптической теории) для граничных подмногообразий с особенностями возникает новый класс операторов, которые называются трансляторами. Такие операторы впервые были введены в 1979 г. в работе [1] (см. также [2–4]). В данной работе вводится и изучается новый класс операторов, которые назовём G-трансляторами. Эти трансляторы инвариантны относительно действия конечной циклической группы G простого порядка на многообразии с точечными особенностями. Интерес к такому классу операторов возникает в связи с изучением нелокальных псевдодифференциальных операторов. В настоящей статье введено понятие эллиптичности для G-трансляторов, доказана для них теорема конечности и проведено сравнение G-эллиптичности с обычной эллиптичностью.

В первом параграфе даётся геометрическое описание многообразий с особенностями и действием группы на них. Точнее, перечисляются всевозможные действия группы G в окрестности точки пересечения подмногообразий.

Во втором параграфе изучаются G-трансляторы. Вводится понятие эллиптичности G-транслятора и доказывается теорема конечности.

В двух последних параграфах сравниваются понятия G-эллиптичности и обычной эллиптичности транслятора в скалярном и векторном случаях. Оказывается, эти понятия, вообще говоря, не совпадают, и в статье приводятся соответствующие контрпримеры.

2. Геометрическое описание многообразия и действия группы на нем

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие. Пусть далее m — простое число и Y^p, $p = 1, 2, \ldots, m$ — замкнутые подмногообразия многообразия M размерностей n_p, которые трансверсально пересекаются в одной точке O. Выберем такие координаты $y = (y^1, \ldots, y^m)$, что подпространство Y^p выделяется следующими уравнениями:

$$y^1 = \ldots = \hat{y}^p = \ldots = y^m = 0.$$

Здесь знак $\widehat{\ }$ над индексом означает, что его надо пропустить. Обозначим далее через

$$H^s(Y) = \oplus_p H^{s_p}(Y^p),$$

прямую сумму пространств Соболева на подмногообразиях Y^p. Здесь $Y = Y^1 \cup Y^2 \cup \ldots \cup Y^m$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ — набор вещественных чисел, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, где $u_p\,(y^p)$ — функции на Y^p.

Статья поступила в редакцию 30 апреля 2011 г.

Автор признателен А.Ю. Савину и Б.Ю. Стернину за постановку задачи и помощь в написании статьи.

Пусть на многообразии M действует группа $G = \mathbb{Z}_m$, так что $GY = Y$. Заметим, что при этом точка пересечения O является неподвижной. Действие группы G на Y естественным образом индуцирует представление этой группы на пространстве G-инвариантных функций $H^s(Y)^G$:

$$H^s(Y)^G = \{u \in H^s(Y) \mid \forall g \in G,\ g^*u = u\}. \tag{1}$$

В силу простоты числа m имеют место два случая.

1. При действии группы G все подмногообразия Y^p инвариантны.
2. Подмногообразия Y^p переходят друг в друга.

Рассмотрим оба этих случая.

2.1. Все подмногообразия Y^p инвариантны

Пусть g, образующий элемент группы G, действует на Y следующим образом:

$$g = (g_1, \dots, g_m) : Y^1 \sqcup \dots \sqcup Y^m \to Y^1 \sqcup \dots \sqcup Y^m,$$

где $g_p : Y^p \to Y^p$, $g_p^m = 1_{Y^p}$, $p = 1, \dots, m$. Тогда в некоторой окрестности точки O существуют координаты y такие, что точка O имеет координаты $y = 0$, а элемент g действует как линейный оператор с матрицей[1]

$$g = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k, E, \dots, E), \tag{2}$$

по отношению к разложению $y = \left(y^1, \dots, y^m\right)$, где B_i — диагональная матрица, на главной диагонали которой присутствуют только элементы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ и $a + bi$ — корень уравнения $\lambda^m = 1$, а E — единичная матрица.

2.2. Подмногообразия Y^p переходят друг в друга

Пусть образующий элемент $g \in G$ действует на Y следующим образом:

$$g = (g_1, \dots, g_m) : Y^1 \sqcup \dots \sqcup Y^m \to Y^1 \sqcup \dots \sqcup Y^m,$$

где $g_p : Y^p \to Y^{p+1}$, $g_{p+m-1} \cdots g_{p+1} g_p = 1_{Y^p}$.

Тогда в некоторой окрестности точки O существуют координаты y с началом O, в которых g имеет вид

$$g(y) = \begin{pmatrix} 0 & E & & & 0 \\ 0 & 0 & E & & 0 \\ . & & . & . & . \\ 0 & & & 0 & E \\ E & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ . \\ . \\ . \\ y^m \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Замечание 1. В этом случае для того, чтобы действие g на пространстве $H^s(Y)$ было корректно определено, необходимо, чтобы были выполнены равенства $s_1 = \dots = s_m$ и $n_1 = \dots = n_m$.

[1] Существование такой системы координат обеспечивается изометричностью преобразования g.

3. G-трансляторы

3.1. Определение

Рассмотрим оператор

$$T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & .. & T_{1m} \\ T_{21} & 0 & .. & T_{2m} \\ .. & .. & .. & \\ T_{m1} & T_{m2} & .. & 0 \end{pmatrix} : H^s(Y) \to H^s(Y), \tag{4}$$

где $T_{pq} = D_1 i_p^* D_2 i_{q*} D_3 : H^{s_q}(Y^q) \to H^{s_p}(Y^p)$ — транслятор (см. [4]), D_j — псевдодифференциальные операторы порядков d_j на соответствующих многообразиях, а i_p^* и i_{p*} — граничный и кограничный операторы, соответствующие вложениям $i_p : Y^p \to M$, $p = 1, \ldots, m$. Заметим что здесь многообразия Y^p, Y^q рассматриваются как подмногообразия в многообразии $Y^p \times Y^q$.

Оператор T на $H^s(Y)$ называется G-*инвариантным*, если $\forall g \in G$ имеем

$$g^* T g^{*-1} = T.$$

Сужая G-инвариантный оператор T на подпространство $H^s(Y)^G$, получим оператор T^G, такой что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^s(Y) & \xrightarrow{T} & H^s(Y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^s(Y)^G & \xrightarrow{T^G} & H^s(Y)^G \end{array}$$

коммутативна. При этом оператор T^G будем называть G-*транслятором*.

3.2. Эллиптичность G-транслятора

В работе [4] было показано, что вне произвольно малой окрестности точки O оператор $1 + T^G$ равен диагональному оператору $\mathrm{diag}(1, 1)$ с точностью до компактных операторов. Поэтому будем исследовать оператор $1 + T^G$ в окрестности точки O.

Определение 1. Пусть

$$1 + \sigma(T)(z) = \begin{pmatrix} 1 & \hat{K}_{12}(z) & .. & \hat{K}_{1m}(z) \\ \hat{K}_{21}(z) & 1 & .. & \hat{K}_{2m}(z) \\ .. & .. & .. & \\ \hat{K}_{m1}(z) & \hat{K}_{m2}(z) & .. & 1 \end{pmatrix} : \oplus_p L^2(\mathbb{S}^{n_p-1}) \to \oplus_p L^2(\mathbb{S}^{n_p-1})$$

символ оператора $1 + T$ (см. [4]). Тогда его сужение

$$1 + \sigma(T^G)(z) : \left(\oplus_p L^2\left(\mathbb{S}^{n_p-1}\right)\right)^G \to \left(\oplus_p L^2\left(\mathbb{S}^{n_p-1}\right)\right)^G$$

будем называть *символом* оператора $1 + T^G$.

Определение 2. Оператор $1+T^G$ называется *эллиптическим*, если функция $1 + \sigma\left(T^G\right)(z)$ обратима всюду на прямой $\mathrm{Re}\, ez = \alpha = s + \dfrac{n}{2m}$, где $n = \mathrm{dim} M$.

Теорема 1. *Если оператор $1+T^G$ эллиптичен, то он является фредгольмовым.*

Доказательство. Воспользуемся схемой доказательства фредгольмовости оператора $1+T$ из [4]. Заморозим коэффициенты оператора $1+T^G$ в рассматриваемой точке и сделаем преобразование Фурье от переменных x к двойственным переменным ξ. В результате получим интегральный оператор $1+\tilde{T}^G$. Далее переходим в сферическую систему координат

$$\xi_p = r_p\omega_p, \quad r_p > 0, \quad \omega_p \in \mathbb{S}^{n_p-1}, \quad p = 1, 2.$$

Заметим, что в локальных координатах действия группы G имеют вид (2) и (3). Аналогичный вид имеют действия в ξ-пространстве, следовательно, в сферических координатах (r,ω) радиальная переменная не меняется при действии группы G. Поэтому корректно определённо действие G на сферах $\mathbb{S}^{n_p-1}$.

Редукция оператора $1+\tilde{T}^G$ к меллиновской свёртке (см., например, [2]) по радиальным переменным с последующим применением преобразования Меллина приводит к оператору умножения на символ $1+\sigma\left(\tilde{T}^G\right)$. Следовательно, обратимость символа $1+\sigma\left(\tilde{T}^G\right)$ даёт почти обратимость оператора $A^G=\psi\left(1+\tilde{T}^G\right)\psi$, где ψ — G-инвариантная срезающая функция, равная нулю в окрестности начала координат $\xi=0$ и равная единице при больших $|\xi|$. В силу этого получим фредгольмовость оператора $1+T^G$. □

Замечание 2. Для полноты изложения дадим формулу для компонент символа $\sigma(T)(z)$. Компонента $\tilde{K}_{pq}(z)$ является результатом применения преобразования Меллина по радиальной переменной к интегральному оператору $K_{pq}(r)$ с ядром

$$K_{pq}\left(r,\omega_p,\omega_q\right) = D_1\left(\omega_p\right) D_2\left(r\omega_p,\omega_q\right) D_3\left(\omega_q\right) r^{d_1-\delta_p},$$

где $\delta_p = \dfrac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^m s_j\right) - s_p - \dfrac{n_p}{2} + \dfrac{n}{2m}$.

4. Сравнение эллиптичности операторов $1+T$ и $1+T^G$

Установим связь между эллиптичностью операторов $1+T$ и $1+T^G$.

Теорема 2. *Если оператор $1+T$ эллиптичен, то оператор $1+T^G$ также эллиптичен. Обратное утверждение имеет место, если выполнено одно из следующих условий:*

1) действие группы G тривиально;

2) нетривиальный элемент группы имеет вид $g=\mathrm{diag}(B,E,\ldots,E)$ по отношению к разложению $y=\left(y^1,y^2,\ldots,y^m\right)$.

В остальных случаях (т.е. когда либо нетривиальный элемент имеет вид $g=\mathrm{diag}\left(B_1,\ldots,B_j,E,\ldots,E\right)$, где $j\geqslant 2$, либо подмногообразия Y^p переходят друг в друга) из эллиптичности оператора $1+T^G$, вообще говоря, не следует эллиптичность оператора $1+T$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно, поскольку символ $1+\sigma(T^G)$ есть сужение символа $1+\sigma(T)$ на инвариантное подпространство. Обратное утверждение доказываем в зависимости от типа действия группы G.

1. Если действие группы G тривиально, то операторы $1+T$ и $1+T^G$ изоморфны.

2. Нетривиальный элемент имеет вид $g=\mathrm{diag}(B,E,\ldots,E)$.

При этом пространство $\left(\oplus_p L^2\left(\mathbb{S}^{n_p-1}\right)\right)^G$ состоит из функций $(u_1(\omega_1),\ldots,u_m(\omega_2))$, где $u_1(B\omega_1)=u_1(\omega_1)\in L^2\left(\mathbb{S}^{n_1-1}\right)$, а $u_p(\omega_p)\in L^2\left(\mathbb{S}^{n_p-1}\right)$, $p=2,\ldots,m$. Рассмотрим уравнение $\left(1+\sigma\left(T^G\right)(z)\right)u=v$ или

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{K}_{12} & .. & \hat{K}_{1m} \\ \hat{K}_{21} & 1 & .. & \hat{K}_{2m} \\ .. & .. & .. & \\ \hat{K}_{m1} & \hat{K}_{m2} & .. & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ v_m \end{pmatrix}$$

Применяя стандартные преобразования, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{K}_{12} & .. & \hat{K}_{1m} \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{K} & \\ . & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ u_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2-\hat{K}_{21}v_1 \\ v_3-\hat{K}_{31}v_1 \\ \ldots \\ v_m-\hat{K}_{m1}v_1 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{K}$ — некоторый оператор.

Для $i=2,\ldots,m$ функции u_i, $v_i-\hat{K}_{i1}v_1$ суть обычные функции в $L^2\left(\mathbb{S}^{n_i-1}\right)$. Поэтому для обратимости оператора $1+T^G$ необходимо, чтобы был обратим оператор $\mathcal{K}$, а это и есть условие обратимости для символа оператора $1+T$.

3. Нетривиальный элемент имеет вид $g=\operatorname{diag}(B_1,\ldots,B_j,E,\ldots,E)$.

Для простоты все контрпримеры рассматриваются, когда $m=2$.

Определим пространство G-антиинвариантных функций, по формуле

$$H^s(Y)^{-G}=\{u\in H^s(Y)\mid\forall g\neq e\quad g^*u=-u\}.$$

Легко проверить, что любой G-инвариантный оператор A сохраняет пространства G-инвариантных функций и G-антиинвариантных функций. Поэтому если G-инвариантный оператор A обратим, то его сужения на каждое из этих подпространств обратимы. Построим пример, в котором сужение символа G-инвариантного оператора $1+T$ на подпространство G-инвариантных функций обратимо, но сужение символа в подпространстве G-антиинвариантных функций не обратимо.

Пусть $M=\mathbb{T}^2$, $Y^1=\{y=0\}$, $Y^2=\{x=0\}$, $g=\operatorname{diag}(-1,-1)$, а C_1,C_2 — некоторые константы. Трансляторы определим следующим образом:

$$T_{12}:H^s(Y^2)\to H^{s-\frac{1}{3}}(Y^1),$$

где $T_{12}=D_1i_1^*D_2i_{2*}D_3$, и D_i — ПДО с символами[2] $D_1(\xi_1)=C_1\xi_1^{\frac{1}{3}}$, $D_2(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1^4+\xi_2^4)^{-\frac{1}{3}}$, $D_3(\xi_2)=\xi_2^{\frac{1}{3}}$,

$$T_{21}:H^{s-\frac{1}{3}}(Y^1)\to H^s(Y^2),$$

где $T_{21}=E_1i_2^*E_2i_{1*}E_3$, и E_i — ПДО с символами $E_1(\xi_2)=C_2\xi_2^{\frac{1}{3}}$, $E_2(\xi_1,\xi_2)=\left(\xi_1^6+\xi_2^6\right)^{-\frac{1}{3}}$, $E_3(\xi_1)=\xi_1^{\frac{1}{3}}$, а ξ_1,ξ_2 — двойственные переменные к x,y.

Операторы T_{12},T_{21} непрерывны при $0<s<\dfrac{1}{3}$.

---

[2]Отметим, что здесь и ниже $\xi_i^{\frac{1}{3}}<0$ при $\xi_i<0$ $(i=1,2)$.

Пусть

$$\varphi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^{z+\frac{1}{6}}}{(r^4+1)^{\frac{1}{3}}}\frac{\mathrm{d}r}{r},\quad \varphi_2(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^{z+\frac{1}{2}}}{(r^6+1)^{\frac{1}{3}}}\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Символ оператора T действует на пространстве $\oplus_p L^2(\mathbb{S}^0)$(см. замечание 2) по формуле

$$\begin{cases}\hat{K}_{12}(z)u_2(z)=C_1\varphi_1(z)\int\limits_{\mathbb{S}^0}u_2(z,\omega_2)\omega_1\omega_2\mathrm{d}\omega_2,\\ \hat{K}_{21}(z)u_1(z)=C_2\varphi_2(z)\int\limits_{\mathbb{S}^0}u_1(z,\omega_1)\omega_1\omega_2\mathrm{d}\omega_1.\end{cases}$$

Фиксируем некоторое значение $\frac{1}{3}<\alpha=\operatorname{Re}ez=s+\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$, такое, что функции $\varphi_1(z),\varphi_2(z)$ отличны от нуля[3] на прямой $\operatorname{Re}ez=\alpha$. Далее выбираем

$$C_1=\frac{1}{2\varphi_1(\alpha)},\quad C_2=\frac{1}{2\varphi_2(\alpha)}.$$

При этом можно записать действие оператора $1+\sigma(T)(z)$ в виде

$$\begin{cases}u_1(\omega_1)+C_1\varphi_1(z)(u_2(1)-u_2(-1))\omega_1=v_1(\omega_1),\\ C_2\varphi_2(z)(u_1(1)-u_1(-1))\omega_2+u_2(\omega_2)=v_2(\omega_2).\end{cases}$$

В подпространстве G-инвариантных, т.е. чётных функций, оператор $1+\sigma(T)(z)$ равен тождественному оператору для любого z на прямой $\operatorname{Re}ez=\alpha$. А в подпространстве нечётных функций для $z=\alpha$ оператор $1+\sigma(T)(z)$ имеет вид:

$$\begin{cases}u_1(\omega_1)+\frac{1}{2}\left(u_2(1)-u_2(-1)\right)\omega_1=v_1(\omega_1)\\ \frac{1}{2}\left(u_1(1)-u_1(-1)\right)\omega_2+u_2(\omega_2)=v_2(\omega_2).\end{cases}$$

Прямой подстановкой можем найти ядро этого оператора, которое порождается элементом $\left(u_1\left(\omega_1\right),u_2\left(\omega_2\right)\right)=\left(\omega_1=-\omega_2\right)$.

4. Подмногообразия Y^p переходят друг в друга.

Подпространство G-инвариантных функций $u=\left(u_1\left(\omega_1\right),u_2\left(\omega_2\right)\right)$ изоморфно пространству функций на одном подмногообразии. В силу этого символ G-инвариантного транслятора изоморфен оператору $1+\tilde{K}_{12}g_1^*$. А оператор $1+\sigma(T)(z)$ обратим тогда и только тогда, когда следующий оператор обратим

$$1-\hat{K}_{12}(z)\hat{K}_{21}(z)=\left(1+\hat{K}_{12}(z)g_1^*\right)\left(1-g_2^*\hat{K}_{21}(z)\right).$$

Следовательно, чтобы доказать это утверждение достаточно построить пример, в котором для G-инвариантного оператора $1+T$ операторы $1+\hat{K}_{12}(z)g_1^*$ обратимы на прямой $\operatorname{Re}ez=\alpha$, а оператор $1-g_2^*\hat{K}_{21}(z_0)$ не является обратимым всюду на прямой $\operatorname{Re}ez=\alpha$.

Пусть $M=\mathbb{T}^4$, $Y^1=\left\{y^1=y^2=0\right\}$, $Y^2=\left\{x^1=x^2=0\right\}$. Трансляторы определяются следующим образом:

$$T_{12}:H^s(Y^2)\to H^s(Y^1),$$

[3]Такое α всегда найдётся в силу аналитичности функций $\varphi_1(z),\varphi_2(z)$.

где $T_{12} = D_1 i_1^* D_2 i_{2*} D_3$, и D_i — ПДО с символами

$$D_1(\xi) = C_1, \quad D_2(\xi, \eta) = \frac{1}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2)^2}, \quad D_3(\eta) = \eta_2^2,$$

а ξ, η — двойственные переменные к x, y. Также положим

$$T_{21} : H^s(Y^1) \to H^s(Y^2),$$

где $T_{21} = E_1 i_2^* E_2 i_{1*} E_3$, и E_i — ПДО с символами

$$E_1(\eta) = C_2, \quad E_2(\xi, \eta) = \frac{1}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2)^2}, \quad E_3(\xi) = \xi_2^2.$$

Операторы T_{12}, T_{21} непрерывны при $0 < s < 2$.

Для некоторого $1 < \alpha = \operatorname{Re} ez = s + 1 < 3$, такого, что функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ отличны от нуля на прямой $\operatorname{Re} ez = \alpha$, подбирая константы

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{\pi\varphi_1(\alpha)}, \quad \text{где} \quad \varphi_1(z) = \varphi_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{r^{z+2}}{(r^2+1)^2} \frac{\mathrm{d}r}{r},$$

можем записать действие оператора $1 + \sigma(T)(z)$(см. замечание 2)

$$\begin{cases} u_1(\omega_1) + C_1\varphi_1(z) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2\omega_2 u_2(\omega_2) \mathrm{d}\omega_2 = v_1(\omega_1), \\ C_2\varphi_2(z) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2\omega_1 u_1(\omega_1) \mathrm{d}\omega_1 + u_2(\omega_2) = v_2(\omega_2). \end{cases}$$

При этом прямой подстановкой можно проверить, что функция $u_1(\omega_1) = c$, где $c = \mathrm{const} \neq 0$ принадлежит оператору $g_2^* \hat{K}_{21}(\alpha) - 1$.

С другой стороны, оператор $\hat{K}_{12}(z) g_1^*$ компактен. Поэтому $1 + \hat{K}_{12}(z) g_1^*$ фредгольмов, причём размерности его ядра и коядра одинаковы. Рассмотрим его ядро. Элемент ядра удовлетворяет уравнениям

$$u_1(\omega_1) + C_1\varphi_1(z) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2\omega_2 u_2(\omega_2) \mathrm{d}\omega_2 = 0, \tag{5}$$

Следовательно,

$$u_1(\omega_1) = u_2(\omega_1) = -C_1\varphi_1(z) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2\omega_2 u_2(\omega_2) \mathrm{d}\omega_2 = kC_1\varphi_1(z).$$

где k — константа. Подставляя в (5), получим $kC_1\varphi_1(z)(1 + \pi C_1\varphi_1(z)) = 0$, следовательно, $k = 0$ т.е. $u_1 = 0$. В силу этого

$$\dim \operatorname{Ker} \left(1 + \hat{K}_{12}(z) g_1^*\right) = \dim \operatorname{Coker} \left(1 + \hat{K}_{12}(z) g_1^*\right) = 0,$$

т.е. оператор $1 + \hat{K}_{12}(z) g_1^*$ обратим. □

5. Обобщённые действия на пространстве векторных функций

В пространстве вектор-функций рассматриваются действия элементов группы G
$$g^*u(y) = A_g(y)u(gy), \tag{6}$$
где u — вектор-функция, A — матричнозначная функция.

В локальных координатах (6) запишется в виде
$$\begin{pmatrix} g_1^* u_1(y^1) \\ \dots \\ g_m^* u_m(y^m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(y^1)u_1(g_1 y^1) \\ \dots \\ A_m(y^m)u_m(g_m y^m) \end{pmatrix},$$
g_i — действие элемента g, индуцируемое на подмногообразии Y^i.

Теорема 3. *Если оператор $1+T$ эллиптичен, то оператор $1+T^G$ также эллиптичен, а в обратную сторону имеют место следующие утверждения:*

1) *Из эллиптичности оператора $1+T^G$ следует эллиптичность оператора $1+T$, если нетривиальный элемент имеет вид $g = \operatorname{diag}(B, E, \dots, E)$ по отношению к разложению $y = \left(y^1, \dots, y^m\right)$ и матрицы $A_i(y^i) = 1$, $i = 2, \dots, m$.*
2) *В остальных случаях из эллиптичности оператора $1+T^G$, вообще говоря, не следует эллиптичность оператора $1+T$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть только те случаи, когда для скалярных функций условия эллиптичности операторов $1+T$ и $1+T^G$ эквивалентны.

1. Действие группы G тривиально.

В векторном случае транслятор действует следующим образом:
$$1+T : H^s\left(Y, \mathbb{C}^k\right) \to H^s\left(Y, \mathbb{C}^k\right).$$
В силу тривиальности действия группы G имеет место равенство:
$$A_i(y^i)u_i(y^i) = u_i(y^i).$$
Отсюда при каждом фиксированном y^i, $u_i(y^i)$ — собственный вектор матрицы $A_i(y^i)$ с собственным значением $+1$. Множество всех таких векторов образует собственное подпространство $E_{y^i} \subset \mathbb{C}^k$. Так как собственное значение не зависит от y^i, то собственное подпространство E_{y^i} зависит от y^i гладко. При этом определяется векторное расслоение $E \in Vect(M)$. И подпространство G-инвариантных функций в $H^s(Y, \mathbb{C}^k)$ можно рассматривать как пространство $H^s(Y, E)$ сечений расслоения E. Поэтому G-транслятор можно рассматривать как транслятор на $H^s(Y, E)$. Следовательно, условие эллиптичности этого транслятора, вообще говоря, не совпадает с условием эллиптичности оператора $1+T$.

2. Нетривиальный элемент имеет вид $g = \operatorname{diag}(B, E, \dots, E)$, и существует матрица $A_i(y^i) \neq 1$, $i \in \{2, \dots, m\}$.

Пусть для простоты $m = 2$, при этом нетривиальный элемент в некоторых координатах в окрестности точки O имеет вид $g = (g_1, g_2) = \operatorname{diag}(B, E)$. Тогда условие G-инвариантности имеет вид
$$\begin{pmatrix} u_1(y^1) \\ u_2(y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(y^1)u_1(g_1 y^1) \\ A_2(y^2)u_2(y^2) \end{pmatrix}.$$

В окрестности точки пересечения рассматривается оператор
$$1+T : H^s\left(\mathbb{R}^n_y, \mathbb{C}^k\right) \to H^s\left(\mathbb{R}^n_y, \mathbb{C}^k\right),$$

с его символом

$$1+\sigma(T)(z)=\begin{pmatrix} 1 & \hat{K}_{12}(z) \\ & \\ \hat{K}_{21}(z) & 1 \end{pmatrix} : \oplus_p L^2\left(\mathbb{S}^{n_p-1}, {}^k\right) \to \oplus_p L^2\left(\mathbb{S}^{n_p-1}, {}^k\right).$$

Если матрица $A_2(y^2)=1$, то, аналогично скалярному случаю, условия эллиптичности операторов $1+T$ и $1+T^G$ эквивалентны. Если же матрица $A_2(y^2)\neq 1$, то дадим контрпример.

Пусть $M=\mathbb{T}^2$, $Y^1=\{y^2=0\}$, $Y^2=\{y^1=0\}$, $k=1$, матрицы $A_g(y^1)=1$, $A_g(y^2)=-1$. Трансляторы определяются следующим образом:

$$T_{12}: H^s\left(Y^2\right)\to H^s(Y^1),$$

где $T_{12}=D_1 i_1^* D_2 i_{2*} D_3$, и D_i — ПДО с символами

$$D_1(\xi)=C_1\xi,\quad D_2(\xi,\eta)=\frac{1}{\xi^2+\eta^2},\quad D_3(\eta)=1,$$

а ξ,η — двойственные переменные к y^1,y^2. Положим также

$$T_{21}: H^s(Y^1)\to H^s(Y^2),$$

где $T_{21}=E_1 i_2^* E_2 i_{1*} E_3$, и E_i — ПДО с символами

$$E_1(\eta)=C_2\eta^2,\quad E_2(\xi,\eta)=\frac{1}{\xi^4+\eta^4},\quad E_3(\xi)=\xi.$$

Операторы T_{12},T_{21} непрерывны при $-1<s<0$.

Для некоторого $-\dfrac{1}{2}<\alpha=\operatorname{Re}ez=s+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$, такого, что функции $\varphi_1(z),\varphi_2(z)$ отличны от нуля на прямой $\operatorname{Re}ez=\alpha$, подбирая константы

$$C_1=\frac{1}{2\varphi_1(\alpha)},\quad C_2=\frac{1}{2\varphi_2(\alpha)},$$

где

$$\varphi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^{z+1}}{r^2+1}\frac{\mathrm{d}r}{r},\quad \varphi_2(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^{z+2}}{r^4+1}\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

можем записать действие оператора $1+\sigma(T)(z)$ в виде

$$\begin{cases} u_1(\omega_1)+C_1\varphi_1(z)(u_2(1)+u_2(-1))\omega_1=v_1(\omega_1),\\ C_2\varphi_2(z)(u_1(1)-u_1(-1))+u_2(\omega_2)=v_2(\omega_2).\end{cases}$$

Подпространство G-инвариантных функций состоит из пар (u_1,u_2) вида $(u_1,0)$, где u_1 — чётная функция. Тогда оператор $1+\sigma(T^G)(z)$ для $\forall z\in\{\operatorname{Re}ez=\alpha\}$ равен тождественному оператору.

Далее оператор $1+\sigma(T)(\alpha)$ записывается следующим образом

$$\begin{cases} u_1(\omega_1)+\dfrac{1}{2}(u_2(1)+u_2(-1))\omega_1=v_1(\omega_1),\\ \dfrac{1}{2}\left(u_1(1)-u_1(-1)\right)+u_2(\omega_2)=v_2(\omega_2).\end{cases}$$

Легко проверить, что пара $(u_1(\omega_1), u_2(\omega_2)) = (-c\omega_1, c)$, $c \neq 0$, принадлежит ядру оператора $1 + \sigma(T)(\alpha)$, т.е. он необратим. $\square$

Литература

1. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические морфизмы на многообразиях с особенностями (оснащение эллиптического оператора) // ДАН СССР. — 1971. — Т. 200, № 1. — С. 45–48. [*Sternin B. Yu.* Ehllipticheskie morfizmih na mnogoobraziyakh s osobennostyami (osnathenie ehllipticheskogo operatora) // DAN SSSR. — 1971. — T. 200, No 1. — S. 45–48.]
2. *Стернин Б. Ю.* Эллиптическая теория на компактных многообразиях с особенностями. — М.: МИЭМ, 1974. [*Sternin B. Yu.* Ehllipticheskaya teoriya na kompaktnihkh mnogoobraziyakh s osobennostyami. — M.: MIEhM, 1974.]
3. *Стернин Б. Ю.* Задачи типа С. Л. Соболева в случае подмногообразий с многомерными особенностями // ДАН СССР. — 1969. — Т. 189, № 4. — С. 732–735. [*Sternin B. Yu.* Zadachi tipa S. L. Soboleva v sluchae podmnogoobraziyj s mnogomernihmi osobennostyami // DAN SSSR. — 1969. — T. 189, No 4. — S. 732–735.]
4. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Об индексе эллиптических трансляторов // Доклады академии наук. — 2011. — Т. 436, № 4. — С. 443–447. [*Savin A. Yu., Sternin B. Yu.* Ob indekse ehllipticheskikh translyatorov // Dokladih akademii nauk. — 2011. — T. 436, No 4. — S. 443–447.]

UDC 515.168.5

On the Ellipticity of G-translators on Manifolds with Isolated Singularities

Nguyen Le Linh

Higher Mathematics Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

The paper deals with G-translators on manifolds with isolated singularities, that is translators invariant with respect to an action of a group G. We describe ellipticity condition for G-translators and prove niteness theorem when G is a finite cyclic group of prime order.

Key words and phrases: elliptic operators, boundary value problems for elliptic equations, stratified manifolds, G-translators.