

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК GEOMETRICAL INVESTIGATIONS OF MIDDLE SURFACES OF SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-2-134-145

УДК 514.7

EDN: GPVKGU

Научная статья / Research article

Геометрические характеристики поверхностей на криволинейно-трапециевидных планах

В.Н. Иванов 

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

✉ i.v.ivn@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 26 января 2024 г.

Доработана: 10 марта 2024 г.

Принята к публикации: 19 марта 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Автор заявляет об отсутствии
конфликта интересов.

Аннотация. Даны метод образования ортогональной криволинейной системы координат в плоскости и методика построения новых форм поверхностей на заданных криволинейно-трапециевидных планах. Приведены рисунки криволинейно трапециевидных планов на основе различных направляющих плоских кривых и рисунки поверхностей на заданных криволинейно-трапециевидных планах, в том числе комбинации поверхностей с сопряженными различными направляющими кривыми. Предложенная методика формообразования поверхностей может использоваться в архитектуре и строительстве для разработки тонкостенных пространственных конструкций как в градостроительстве, так и в конструкциях промышленных зданий. Но при расчете напряженно-деформированного состояния тонких оболочек в большинстве методов использованы геометрические характеристики срединных поверхностей оболочек. На основе векторного уравнения поверхностей на криволинейно-трапециевидных планах получены формулы коэффициентов квадратичных форм и кривизн поверхностей. Приведены примеры поверхностей и вычисления коэффициентов квадратичных форм и кривизн поверхностей с конкретными направляющими кривыми и функциями вертикальной координаты поверхности.

Ключевые слова: плоская кривая, ортогональная криволинейная система координат в плоскости, векторное уравнение поверхности на криволинейно-трапециевидных планах, коэффициенты квадратичных форм поверхности, кривизны поверхности

Иванов Вячеслав Николаевич, доктор технических наук, профессор-консультант департамента строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909; ORCID: 0000-0003-4023-156X; E-mail: i.v.ivn@mail.ru

© Иванов В.Н., 2024

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Для цитирования

Иванов В.Н. Геометрические характеристики поверхностей на криволинейно-трапециевидных планах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 2. С. 134–145. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-2-134-145>

Geometric Characteristics of Surfaces with Curved Trapezoidal Plan

Vyacheslav N. Ivanov 

RUDN University, Moscow, Russia

✉ i.v.ivn@mail.ru

Article history

Received: January 26, 2024

Revised: March 10, 2024

Accepted: March 19, 2024

Conflicts of interest

The author declares that there is no conflict of interest.

Abstract. A method of forming a curved orthogonal coordinate system on a plane and a technique of constructing new surface shapes with curved trapezoidal plans are presented. Multiple examples of curved trapezoidal plans based on different directrix curves and surfaces with the given plans, including combinations of surfaces with different conjugate directrix curves, are illustrated. The proposed technique of surface forming may be used in architecture and construction for development of thin-walled space structures in both urban and industrial buildings. But for the analysis of thin shells, geometric characteristics of the middle surface of the shell are usually used. Vector equation of surfaces with curved trapezoidal plan was used to obtain the formulas for the fundamental form coefficients and surface curvatures. Examples of calculation of the fundamental form coefficients and curvatures of surfaces with particular directrix curves and vertical coordinate functions are presented.

Keywords: plane curve, curved orthogonal coordinate system in plane, vector equation of surface with curved trapezoidal plan, coefficients of fundamental form, surface curvature

For citation

Ivanov V.N. Geometric characteristics of surfaces with curved trapezoidal plan. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(2):134–145. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-2-134-145>

1. Введение

Уравнение поверхности обычно задается в параметрической форме — функциях проекции точки поверхности на прямоугольную систему координат. Однако для многих поверхностей вывод параметрических уравнений является непростой задачей. Кроме того, по параметрическим уравнениям бывает затруднительно определить форму поверхности. Более удобны и наглядны векторные уравнения поверхностей. Формообразование многих классов поверхностей осуществляется на основе задания пространственной или плоской направляющей с системой образующих кривых, привязанных к направляющей кривой. Для задания образующих кривых вводятся векторные функции, связанные с направляющей кривой — векторы касательной, нормали и бинормали. Если направляющая кривая задана в прямоугольной системе координат, то на основе векторных уравнений поверхности можно получить параметрические уравнения поверхности. Ниже рассматривается класс поверхностей с системой плоских образующих кривых в нормальной плоскости плоской направляющей кривой. Этот класс поверхностей рассматривался в [1], но в ней не были получены формулы коэффици-

Vyacheslav N. Ivanov, Doctor of Technical Science, Consulting Professor, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 3110-9909; ORCID: 0000-0003-4023-156X; E-mail: i.v.ivn@mail.ru

ентов квадратичных форм поверхностей, необходимых для расчета оболочек. В [2] указаны все известные на сегодняшний день классы, подклассы и группы аналитических поверхностей. Следуя классификации, предложенной в [2] и учитывая способ их построения, предлагаемые к рассмотрению поверхности могут быть включены в класс «Кинематические поверхности» [3]. Принимая во внимание, что рассматриваемые поверхности на криволинейно-трапециевидном плане задаются аналитическими формулами, они могут привлечь внимание архитекторов в рамках архитектурного стиля «Параметрическая архитектура» [4].

2. Уравнение поверхности на криволинейно трапециевидном плане, коэффициенты квадратичных форм поверхности

Ортогональная криволинейная система координат в плоскости образуется системой прямых, ортогональных заданной плоской базовой кривой $r_0(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)$ (рис. 1).

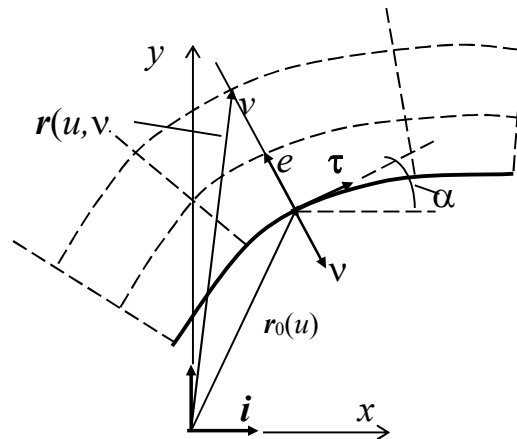


Рис. 1. Псевдополярная система координат
И с т о ч н и к: выполнено В.Н. Ивановым

Figure 1. Pseudo-polar coordinate system
S o u r c e: compiled by V.N. Ivanov

Таким образом, криволинейно-ортогональная система координат в плоскости (криволинейно-трапециевидный план) образуется системой эквидистантных кривых, параллельных базовой кривой и системой прямых, ортогональных системе эквидистантных кривых.

Уравнение ортогональной криволинейной координатной системы

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0(u) - v\mathbf{v}, \quad (1)$$

\mathbf{v} — нормаль базовой кривой; v — координата образующих прямых по нормали к базовой кривой.

Положительное значение координаты прямых принимаем в сторону выпуклости базовой кривой, так как при направлении в сторону вогнутости может получаться пересекающаяся система прямых.

Задаваясь функцией вертикальной координаты $z(u, v)$, получаем векторное уравнение поверхности $\rho(u, v)$ на базе криволинейно-ортогональной системы координат в плоскости

$$\rho(u, v) = \mathbf{r}_0(u) - v\mathbf{v} + z(u, v)\mathbf{k}. \quad (2)$$

Для вывода формул коэффициентов получаем производные векторного уравнения, учитывая соотношения классической дифференциальной геометрии [5; 6]:

$$\mathbf{r}'_0 = s'\boldsymbol{\tau}; \quad s' = |\mathbf{r}'_0|; \quad \boldsymbol{\tau}' = s'k_s\mathbf{v} = k_s\mathbf{v}; \quad k_s = s'k; \quad \mathbf{v}' = -k_s\boldsymbol{\tau}. \quad (3)$$

Тогда получаем

$$\boldsymbol{\rho}_u = (s' + vk_s)\boldsymbol{\tau} + z_u\mathbf{k}; \quad \boldsymbol{\rho}_v = -\mathbf{v} + z_v\mathbf{k}. \quad (4)$$

Коэффициенты 1-й квадратичной формы

$$E = (\boldsymbol{\rho}_u\boldsymbol{\rho}_u) = (s' + vk_s)^2 + z_u^2; \quad G = (\boldsymbol{\rho}_v\boldsymbol{\rho}_v) = 1 + z_v^2; \quad F = (\boldsymbol{\rho}_u\boldsymbol{\rho}_v) = z_u z_v. \quad (5)$$

Вектор единичной нормали поверхности

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\Sigma}(\boldsymbol{\rho}_u \times \boldsymbol{\rho}_v) = \frac{1}{\Sigma}(z_u\boldsymbol{\tau} - (s' + vk_s)(z_v\mathbf{v} + \mathbf{k})), \quad (6)$$

$$\Sigma = \sqrt{EG - F^2} = |(\boldsymbol{\rho}_u \times \boldsymbol{\rho}_v)| = \sqrt{(s' + vk_s)^2(1 + z_v^2) + z_u^2} \text{ — дискриминант поверхности.}$$

Вычисляем вторые производные векторного уравнения:

$$\boldsymbol{\rho}_{uu} = (s'' + vk'_s)\boldsymbol{\tau} + (s' + vk_s)k_s\mathbf{v} + z_{uu}\mathbf{k}; \quad \boldsymbol{\rho}_{uv} = k_s\boldsymbol{\tau} + z_{uv}\mathbf{k}; \quad \boldsymbol{\rho}_{vv} = z_{vv}\mathbf{k}. \quad (7)$$

Коэффициенты 2-й квадратичной формы

$$L = (\boldsymbol{\rho}_{uu}\mathbf{m}) = \frac{(s'' + vk'_s)z_u + (s' + vk_s)^2 k_s z_v - (s' + vk_s)z_{uu}}{\Sigma};$$

$$N = (\boldsymbol{\rho}_{vv}\mathbf{m}) = \frac{(s' + vk_s)z_{vv}}{\Sigma}; \quad M = (\boldsymbol{\rho}_{uv}\mathbf{m}) = \frac{-z_u k_s - (s' + vk_s)z_{uv}}{\Sigma}. \quad (8)$$

Кривизны поверхности:

$$k_u = \frac{L}{E} = \frac{(s'' + vk'_s)z_u + (s' + vk_s)^2 k_s z_v - (s' + vk_s)z_{uu}}{\Sigma[(s' + vk_s)^2 + z_u^2]};$$

$$k_v = \frac{N}{G} = \frac{(s' + vk_s)z_{vv}}{\Sigma(1 + z_v^2)}; \quad k_{uv} = \frac{M}{\sqrt{EG}} = \frac{-z_u k_s - (s' + vk_s)z_{uv}}{\Sigma[(s' + vk_s)^2 + z_u^2]\sqrt{(1 + z_v^2)}}. \quad (9)$$

Так как коэффициенты квадратичных форм $F, M \neq 0$, поверхностная координатная система рассматриваемых поверхностей в общем случае не является ни ортогональной, ни сопряженной и не является линиями главных кривизн.

3. Подклассы поверхностей на криволинейно трапецевидных планах

Отметим, что рассматриваемая система поверхностей относится к классу нормальных поверхностей [7–9] — поверхностей с системой плоских координатных линий (образующих кривых) в нормальной плоскости направляющей кривой. В [7; 8] показано, что только для двух подклассов нормальных поверхностей образующие кривые будут линиями главных кривизн: 1 — поверхностей вращения — направляющая кривая прямая линия, образующих кривые окружности; 2 — нормальные поверхности с системой неизменяемых образующих кривых. 2-й подкласс относится к классу поверхностей Монжа [8; 10–13].

Положив в формулах квадратичных форм $z = z(v)$ — образующая кривая не изменяется при движении в нормальной плоскости направляющей кривой ($z_u = z_{uv} = 0$), получаем для поверхностей Монжа:

$$\begin{aligned}
 E &= (s' + vk_s)^2; & G &= (\mathbf{p}_v \mathbf{p}_v) = 1 + z_v^2; & F &= 0; & \Sigma &= (s' + vk_s) \sqrt{1 + z_v^2}; \\
 L &= \frac{(s' + vk_s) k_s z_v}{\sqrt{1 + z_v^2}}; & N &= \frac{z_{vv}}{\sqrt{1 + z_v^2}}; & M &= 0; \\
 k_1 &= \frac{k_s z_v}{(s' + vk_s) \sqrt{1 + z_v^2}}; & k_2 &= \frac{z_{vv}}{(1 + z_v^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Координатная сеть поверхностей Монжа является линиями главных кривизн поверхности. Если образующей кривой поверхности Монжа будет прямая линия $z = vtg\theta$ (θ — угол наклона образующей прямой к плоскости направляющей кривой), то получаем торсовую поверхность одинакового ската [13–15]. При этом имеем:

$$\begin{aligned}
 z_v &= tg\theta; & z_{vv} &= 0; & 1 + z_v^2 &= \frac{1}{\cos^2\theta}; & \Sigma &= \frac{s' + vk_s}{\cos\theta}; \\
 E &= (s' + vk_s)^2; & G &= \frac{1}{\cos^2\theta}; & L &= (s' + vk_s) k_s \sin\theta; & N &= 0; & k_1 &= \frac{k_s z_v \sin\theta}{s' + vk_s}; & k_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

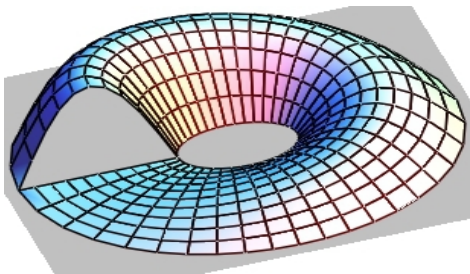


Рис. 2. Поверхность с направляющим эллипсом и образующей синусоидой
И с т о ч н и к: выполнено В.Н. Ивановым
Figure 2. Surface with an elliptical directrix and a sinusoidal generatrix
S o u r c e: compiled by V.N. Ivanov

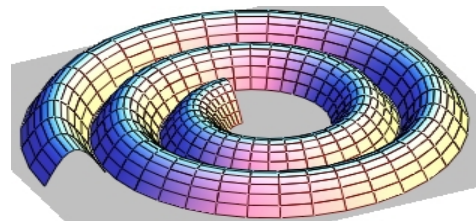


Рис. 3. Эвольвентно-синусоидальная поверхность Монжа
И с т о ч н и к: выполнено В.Н. Ивановым
Figure 3. Involute-sinusoidal Monge surface
S o u r c e: compiled by V.N. Ivanov

Если угол наклона образующей прямой $\theta = 0$, $z = 0$, то получаем криволинейно-трапециевидную в плане пластинку:

$$E = (s' + vk_s)^2; \quad G = 1; \quad L = N = 0; \quad k_1 = k_2 = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим примеры поверхностей с конкретными направляющими кривыми и образующими кривыми. На рис. 2 приведена поверхность с направляющим эллипсом и синусоидальной образующей кривой, амплитуда которой изменяется по линейному закону:

$$\mathbf{r}_0(u) = X(u)\mathbf{i} + Y(u)\mathbf{j}; \quad X(u) = a \cos u; \quad Y(u) = b \sin u \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad z(u, v) = c \frac{u}{2\pi} \sin \pi \frac{v}{d};$$

$$u = 0 \div 2\pi; \quad v = 0 \div d,$$

где c — максимальная амплитуда синусоиды; d — ширина образующей синусоиды (поверхности).
Определяем параметры направляющего эллипса и производные образующей кривой:

$$s' = \sqrt{X'^2 + Y'^2} = a\sqrt{\eta}; \quad \eta = \sin^2 u + \varepsilon^2 \cos^2 u; \quad \varepsilon = \frac{b}{a}; \quad s'' = \frac{a}{2} \frac{\eta'}{\sqrt{\eta}}; \quad \eta' = (1 + \varepsilon^2) \sin 2u;$$

$$k = \frac{X'Y'' - X''Y'}{s'^3} = \frac{\varepsilon}{a\eta^{3/2}}; \quad k_s = s'k = \frac{\varepsilon}{\eta}; \quad k'_s = -\frac{\varepsilon}{\eta^2} \eta' = -\varepsilon(1 + \varepsilon^2) \frac{\sin 2u}{\eta^2};$$

$$z_u = \frac{c}{2\pi} \sin \pi \frac{v}{d}; \quad z_{uu} = 0; \quad z_{uv} = \frac{c}{2d} \cos \pi \frac{v}{d}; \quad z_v = \frac{c}{2d} u \cos \pi \frac{v}{d}; \quad z_{vv} = -\frac{c\pi}{2d^2} u \sin \pi \frac{v}{d}.$$

Коэффициенты квадратичных форм:

$$E = \left(a\sqrt{\eta} + v \frac{\varepsilon}{\eta} \right)^2 + \frac{c^2}{4\pi^2} \sin^2 \pi \frac{v}{d} \quad G = 1 + \frac{c^2}{4d^2} u^2 \cos^2 \pi \frac{v}{d} \quad F = \frac{c^2}{8\pi d} u \sin 2\pi \frac{v}{d}$$

$$\Sigma = \sqrt{\left(a\sqrt{\eta} + v \frac{\varepsilon}{\eta} \right)^2 \left(1 + \frac{c^2}{4d^2} u^2 \cos^2 \pi \frac{v}{d} \right) + \frac{c^2}{4\pi^2} \sin^2 \pi \frac{v}{d}};$$

$$L = (\rho_{um} m) = c \frac{\frac{1 + \varepsilon^2}{\pi} \left(\frac{a}{2 \sin 2u} + \varepsilon \frac{v}{\eta^2} \right) \sin 2u \sin \pi \frac{v}{d} + \left(a\sqrt{\eta} + v \frac{\varepsilon}{\eta} \right)^2 \frac{\varepsilon u}{d} \cos \pi \frac{v}{d}}{2\Sigma};$$

$$N = -\frac{c\pi}{2d^2} \frac{\left(a\sqrt{\eta} + v \frac{\varepsilon}{\eta} \right) u \sin \pi \frac{v}{d}}{\Sigma} \quad M = -c \frac{\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\eta} \sin \pi \frac{v}{d} + \frac{1}{d} \left(a\sqrt{\eta} + v \frac{\varepsilon}{\eta} \right) \cos \pi \frac{v}{d}}{2\Sigma}. \quad (13)$$

Рассмотрим пример с поверхностью Монжа (рис. 3), с направляющей эвольвентой круга $X(u) = a(\cos u + u \sin u)$; $Y(u) = a(\sin u - u \cos u)$ и образующей синусоидой $z = c \sin \frac{v}{d}$; $u = (1 \div 5)\pi$; $v = 0 \div d$, где c — амплитуда синусоиды; d — ширина образующей синусоиды (поверхности).

Параметры направляющей эвольвенты и производные образующей кривой:

$$s' = au ; \quad s'' = a ; \quad k = \frac{1}{au} ; \quad k_s = 1 ; \quad k'_s = 0 ; \quad z_v = \frac{c}{d} \cos \frac{v}{d} ; \quad z_{vv} = -\frac{c}{d^2} \sin \frac{v}{d} .$$

Коэффициенты квадратичных форм и кривизны поверхности (см. рис. 3):

$$E = (au + v)^2 ; \quad G = (\rho_v \rho_v) = 1 + \frac{c^2}{d^2} \cos^2 \frac{v}{d} ; \quad \Sigma = (au + v) \sqrt{1 + \frac{c^2}{d^2} \cos^2 \frac{v}{d}} ;$$

$$L = \frac{c(au + v) \cos \frac{v}{d}}{d \sqrt{1 + \frac{c^2}{d^2} \cos^2 \frac{v}{d}}} ; \quad N = -\frac{c \sin \frac{v}{d}}{d^2 \sqrt{1 + \frac{c^2}{d^2} \cos^2 \frac{v}{d}}} ;$$

$$k_1 = \frac{ccos \frac{v}{d}}{d(au + v) \sqrt{1 + \frac{b^2}{d^2} \cos^2 \frac{v}{d}}} ; \quad k_2 = -\frac{c \sin \frac{v}{d}}{d^2 \left(1 + \frac{c^2}{d^2} \cos^2 \frac{v}{d}\right)^{3/2}} . \quad (14)$$

На рис. 4 приведена поверхность одинакового ската с направляющей лемниской Бернулли:

$$X(u) = aR(u) \cos u ; \quad Y(u) = aR(u) \sin u ;$$

$$R(u) = \sqrt{2 \cos 2u} , \quad u = (-1 \div 1)\pi \quad 4 .$$

$$s' = 2a R(u) ; \quad k = \frac{3}{2} \frac{R(u)}{a} ; \quad k_s = 3 .$$

Коэффициенты квадратичных форм и кривизны поверхности (рис. 4):

$$E = \left(\frac{2a}{R(u)} + 3v\right)^2 ; \quad G = \frac{1}{\cos^2 \theta} ; \quad L = 3 \left(\frac{2a}{R(u)} + 3v\right) \sin \theta ; \quad k_1 = 3 \frac{R(u) \sin \theta}{2a + 3R(u)v} ; \quad k_2 = 0 . \quad (15)$$

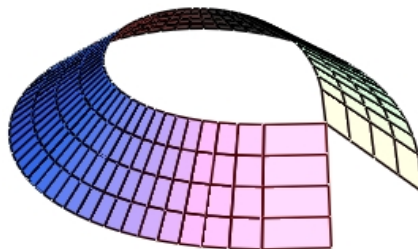


Рис. 4. Поверхность одинакового ската с лемниской Бернулли

И с т о ч н и к: выполнено В.Н. Ивановым

Figure 4. Equal slope surface with the Bernoulli lemniscate

S o u r c e: compiled by V.N. Ivanov

Рассмотрим вариант линейчатых поверхностей, не относящихся к подклассу поверхностей одинакового ската.

На рис. 5 приведены волнообразные линейчатые поверхности с различными направляющими кривыми.

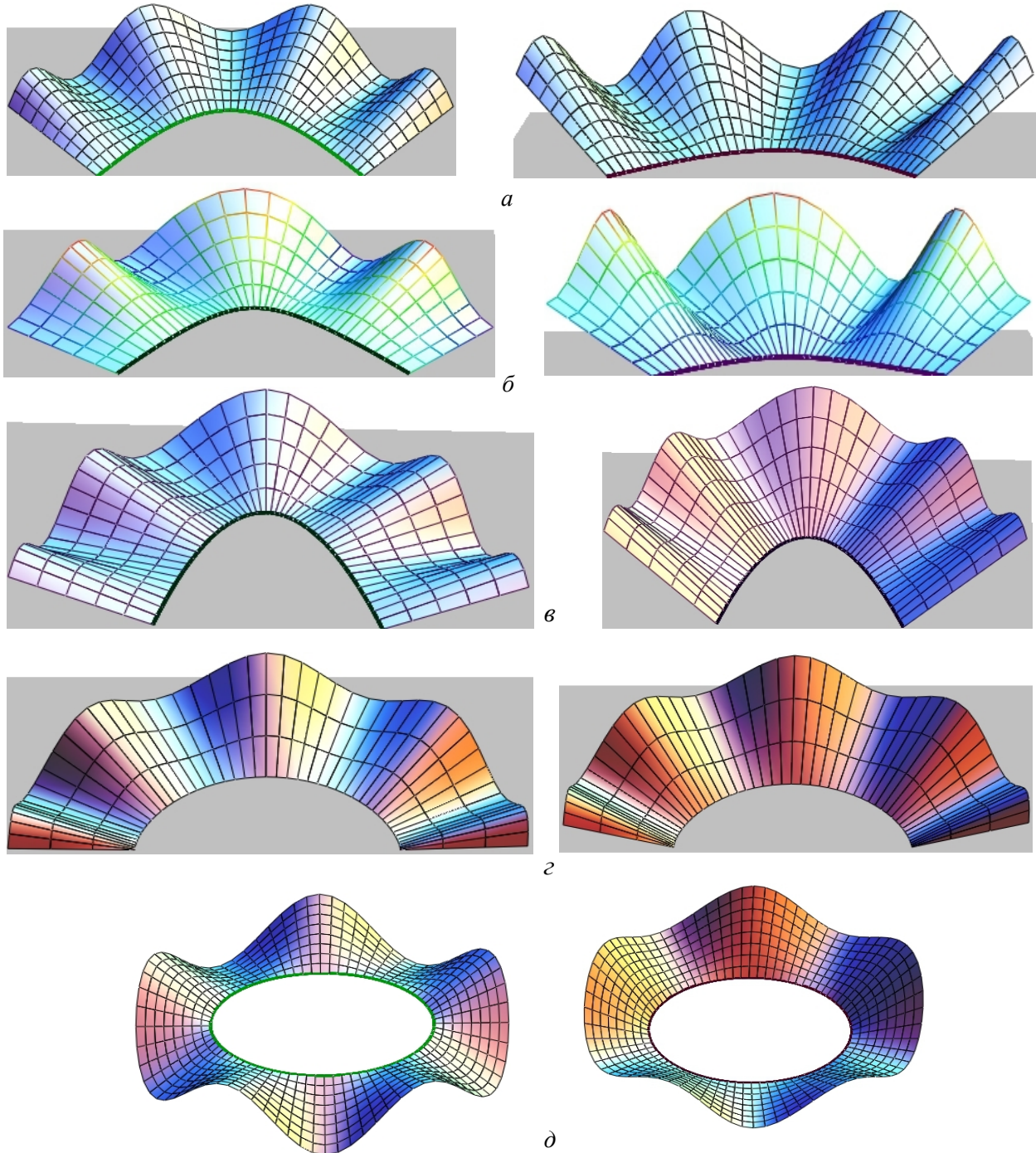


Рис. 5. Волнообразные линейчатые поверхности с направляющими кривыми:
a — синусоида; *б* — гипербола; *в* — парабола; *г* — циклоида; *д* — эллипс
 И с т о ч н и к: выполнено В.Н. Ивановым

Figure 5. Undulating ruled surfaces with directrix curves:
a — sinusoid; *б* — hyperbola; *в* — parabola; *г* — cycloid; *д* — ellipse
 S o u r c e: compiled by V.N. Ivanov

Образующая прямая при движении вдоль направляющей кривой совершает волнообразное движение в нормальной плоскости направляющей кривой:

$$a) z(u, v) = v(c + d \cos tu)$$

или

б) $z(u, v) = v(c + d \sin tu)$, $t = p \frac{\pi}{\Delta u}$, $\Delta u = u_k - u_n$ — диапазон изменения координаты направляющей кривой; p — число полувольт колебания образующей кривой; $c = \operatorname{tg} \theta$, θ — угол наклона образующей кривой вокруг которого совершается колебательное движение образующей прямой:

$$a) z_u = -dvt \sin tu; z_{uu} = -dt^2 v \cos tu; z_v = c + d \cos tu; z_{uv} = -dt \sin tu; z_{vv} = 0;$$

$$б) z_u = dtv \cos tu; z_{uu} = -dt^2 v \sin tu; z_v = c + d \sin tu; z_{uv} = dt \cos tu; z_{vv} = 0. \quad (16)$$

На рис. 5 в левом столбце приведены волнообразные линейчатые поверхности при $\theta = 0$, в правом — $\theta = 0$.

Коэффициенты квадратичных форм и кривизны поверхности определяются по общим формулам (4–9), с учетом формул (16) и уравнений направляющих кривых, при этом $N = 0$, $k_v = 0$.

При направляющей циклоиде (рис. 5, з) $X(u) = a(u - \sin u)$, $Y(u) = a(1 - \cos u)$, $u = (0 \div 2\pi)$, получим:

$$s' = 2a \sin(u/2); s'' = a \cos(u/2); k = \frac{1}{4a \sin(u/2)}; k_s = \frac{1}{2}; k'_s = 0;$$

$$E = \left(2a \sin(u/2) + \frac{v}{2} \right)^2 + (dvt)^2 \cos^2(tu); G = 1 + (c + d \sin tu)^2; F = -dvt(c + d \sin tu) \sin tu;$$

$$\Sigma = \sqrt{\left[\left(2a \sin(u/2) + \frac{v}{2} \right)^2 + (dvt)^2 \cos^2(tu) \right] \left[1 + (c + d \cos tu)^2 \right] - [dvt(c + d \sin tu) \sin tu]^2};$$

$$L = \left[adtv \cos^2(u/2) + \left(2a \sin(u/2) + \frac{v}{2} \right)^2 \frac{c + d \cos tu}{2} - \left(2a \sin(u/2) + \frac{v}{2} \right) dt^2 v \cos tu \right] \frac{1}{\Sigma};$$

$$M = \frac{dt}{2} \frac{v(\sin tu - \cos tu) - 4a \sin(u/2) \cos tu}{\Sigma} 0; N = 0. \quad (17)$$

4. Результаты исследования

Исследуемый в работе класс поверхностей на криволинейно-трапециевидных планах практически образуется движением некоторой образующей кривой в нормальной плоскости заданной направляющей кривой. Образующая кривая может менять форму при движении вдоль направляющей кривой, но берется отрезок постоянной ширины.

На основе общих формул рассматриваемого класса поверхностей получены формулы поверхностей с конкретными направляющими кривыми и функциями образующих кривых как для поверхностей общего типа, так и для поверхностей Монжа и поверхностей одинакового ската. Из этих выводов видно, что использование общих формул коэффициентов квадратичных форм класса поверхностей значительно упрощает процесс вывода формул для конкретной поверхности.

Для каждой исследуемой поверхности приведены рисунки поверхности.

Рассмотрен подкласс волнообразных поверхностей, образуемых прямой образующей, совершающих колебательные движения в нормальной плоскости направляющей кривой. Получены формулы квадратичных форм этого подкласса. Приведены рисунки волнообразных поверхностей на криволинейно-трапециевидных планах с различными направляющими кривыми.

Рисунки поверхностей выполнены в системе MathCad на основе векторных уравнений поверхностей [8; 16].

Представленные поверхности на криволинейно-трапециевидных планах на данный момент еще не нашли реального воплощения в объектах гражданского и промышленного назначения, но можно с уверенностью утверждать, что они войдут в резерв поверхностей для будущего использования, по аналогии с поверхностями, перечисленными в [17; 18]. Кроме чисто теоретического использования полученных материалов, поверхности на криволинейно-трапециевидных планах могут помочь более четко определить границы новейших архитектурных стилей, появившихся в XXI в. [19; 20].

5. Заключение

Показано:

а) если функция вертикальной координаты поверхности зависит от координатного параметра направляющей кривой поверхности (форма образующей кривой изменяется в процессе движения в нормальной плоскости направляющей кривой), то координатная система поверхностей не является ни ортогональной, ни сопряженной;

б) если в нормальной плоскости направляющей кривой движется неизменная кривая, то система координат поверхности является линиями главных кривизн. Этот подкласс исследуемого класса поверхностей относится к классу поверхностей Монжа. На основе общих формул получены формулы коэффициентов квадратичных форм поверхностей Монжа;

в) если в нормальной плоскости направляющей кривой движется прямая линия с постоянным наклоном к плоскости направляющей кривой, то получаем торсовую поверхность одинакового ската. Этот вид поверхностей является подклассом поверхностей Монжа.

В работе получено:

1) векторное уравнение класса поверхностей на криволинейно-трапециевидных планах;

2) на основе векторного уравнения получены формулы коэффициентов квадратичных форм и кривизн исследуемого класса поверхностей.

Многие архитекторы и инженеры-строители уверены, что в XXI веке происходит возрождение интереса к проектированию и строительству криволинейных структур и тонких оболочек. В связи с этим необходимо расширять число новых аналитических поверхностей и показывать их преимущества при использовании в архитектуре, машиностроении и геометрии.

Список литературы

1. Иванов В.Н., Имомназаров Т.С., Фархан И.Т. Ортогональная криволинейная система координат и построение поверхностей на трапециевидно-криволинейных планах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2017. Т. 18. № 4. С. 518–527. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-18-4-518-527>

2. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures // Строительство и реконструкция. 2019. № 5(85). С. 23–34. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-85-5-23-34>

3. Krivoshapko S.N. Kinematic surfaces with congruent generatrix curves // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2023. Vol. 24. № 2. P. 166–176. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2023-24-2-166-176>

4. Мамиева И.А. Аналитические поверхности для параметрической архитектуры в современных зданиях и сооружениях // Academia. Архитектура и строительство. 2020. № 1. С. 150–165. EDN: KNYКТУ

5. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. М.: ГИФМЛ, 1963. 40 с.

6. Forsyth A.R. Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Cambridge, 1920.

7. Иванов В.Н. Геометрия и формообразование нормальных поверхностей с семейством плоских координатных линий // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2011. № 4. С. 6–14. EDN: MQIJF
8. Иванов В.Н., Романова В.А. Конструкционные формы пространственных конструкций, визуализация поверхностей в системах «MathCad» и «AutoCAD»: монография. М.: Изд-во АСВ, 2016. 412 с.
9. Иванов В.Н., Шмелева А.А. Геометрические характеристики деформированного состояния оболочек с ортогональной системой координат срединной поверхности // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 1. С. 38–44. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-38-44>
10. Монж Г. Приложение анализа к геометрии. М.: ОНТИ, 1936.
11. Gil-oulbé M., Ndomilep A.J.I. Geometry and classification of carved Monge surfaces. *Journal of Physics Conference Series*. 2021. Vol. 1687(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1687/1/012002>
12. Bulca B., K. Arslan K. Surfaces Given with the Monge Patch in E4E4 // *Journal of mathematical physics analysis geometry*. 2013. Vol. 9. No. 4. P. 435–447.
13. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Springer International Publishing Switzerland, 2015. 752 p.
14. Иванов В.Н., Алёшина О.О. Сравнительный анализ результатов определения параметров напряженно-деформированного состояния оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 5. С. 374–383. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-374-383>
15. Кривошапко С.Н. Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек: монография. М.: РУДН, 2009. 357 с.
16. Ivanov V.N. Constructing shells and their visualization in system “MathCad” on basis of vector equations of surfaces // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 456. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012018>
17. Bradshaw R., Campbell D., Gargari M., Mirmiran A., Tripeny P. Special structures. Past, present, and future // *Journal of Structural Engineering*. 2002. Vol. 128. P. 691–701. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2002\)128:6\(691\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2002)128:6(691))
18. Gil-oulbe M. Reserve of analytical surfaces for architecture and construction // *Building and Reconstruction*. 2021. № 6 (98). P. 63–72. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-98-6-63-72>
19. Pakowska M. Parametric, generative, evolutionary, organic and bionic architecture — A new look at an old problem // *Architecture et Artibus*. 2014. № 1. P. 42–45. URL: <http://aeawa.pb.edu.pl/wp-content/uploads/2018/08/Architektura-1-2014-artykul-IX.pdf> (дата обращения: 11.09.2023)
20. Alborova L.A., Mamieva I.A. Curvilinear forms in architecture of buildings and structures up to the XXI Century // *Academia. Архитектура и строительство*. 2023. № 3. P. 154–164. <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2023-3-154-164>

References

1. Ivanov V.N., Imomnazarov T.S., Farhan I.T. Orthogonal Curved Coordinate System and Forming the Surfaces on Trapezium-Curved Plans. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2017;18(4):518–527. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/2312-8143-18-4-518-527>
2. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures. *Building and reconstruction*. 2019;5(85):23–34. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-85-5-23-34>
3. Krivoshapko S.N. Kinematic surfaces with congruent generatrix curves. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2023;24(2):166–176. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2023-24-2-166-176>
4. Mamieva I.A. Analytical surfaces for parametric architecture in contemporary buildings and structures. *Academia. Architecture and construction*. 2020;1:150–165. (In Russ.) EDN: KNYKTY
5. Shulikovskiy V.I. *Classical differential geometry*. Moscow: GIFVL; 1963. (In Russ.)
6. Forsyth A.R. *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge; 1920.
7. Ivanov V.N. Geometry and forming of the normal surfaces with system of plane coordinate lines. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*. 2011;4:6–14. (In Russ.) EDN: MQIJF
8. Ivanov V.N., Romanova V.A. *Constructive forms of space constructions. Visualization of the surfaces at the systems “MathCAD,” and “AutoCAD.”* Monograph. Moscow: ASV Publ.; 2016.
9. Ivanov V.N., Shmeleva A.A. Geometric characteristics of the deformation state of the shells with orthogonal coordinate system of the middle surfaces. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*. 2020;1:38–44. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-38-44>
10. Monge G. *Application of analysis to neometry*. Moscow: ONTI Publ.; 1936.
11. Gil-oulbé M., Ndomilep A.J.I. Geometry and classification of carved Monge surfaces. *Journal of Physics Conference Series*. 2021;1687(1):012002. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1687/1/012002>

12. Bulca B., Arslan K. Surfaces Given with the Monge Patch in E4E4. *Journal of mathematical physics analysis geometry*. 2013;9(4):435–447.
13. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Switzerland: Springer International Publ.; 2015.
14. Ivanov V.N., Alyoshina O.O. Comparative analysis of the results of determining the parameters of the stress-strain state of equal slopes shell. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*. 2019;15(5):374–383. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-374-383>
15. Krivoshapko S.N. *Geometry of ruled surfaces with cuspidal edge and the linear theory of analysis of torus shells*. Monograph. Moscow: RUDN; 2009. (In Russ.)
16. Ivanov V.N. Constructing shells and their visualization in system “MathCad” on basis of vector equations of surfaces. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019;456(2018):012018. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012018>
17. Bradshaw R., Campbell D., Gargari M., Mirmiran A., Tripeny P. Special structures. Past, present, and future. *Journal of Structural Engineering*. 2002;128:691–701. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2002\)128:6\(691\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2002)128:6(691))
18. Gil-oulbe M. Reserve of analytical surfaces for architecture and construction. *Building and Reconstruction*. 2021;6(98):63–72. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-98-6-63-72>
19. Pakowska M. Parametric, generative, evolutionary, organic and bionic architecture — A new look at an old problem. *Architecture et Artibus*. 2014;1:42–45. Available from: <http://aeawa.pb.edu.pl/wp-content/uploads/2018/08/Architektura-1-2014-artykul-IX.pdf> (accessed: 11.09.2023).
20. Alborova L.A., Mamieva I.A. Curvilinear forms in architecture of buildings and structures up to the XXI Century. *Academia. Architecture and Construction*. 2023;3:154–164. (In Russ.) <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2023-3-154-164>