УДК 517.925

Исследование методом расщепления сингулярно возмущённых начальных задач для неавтономных систем ОДУ

А. З. Воркне

Кафедра высшей математики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

С помощью неавтономного варианта метода расщепления с новой точки зрения изучены сингулярно возмущённые (с/в) начальные задачи для модельных систем ОДУ. Предложенный алгебраический метод позволяет построить квазирегулярную асимптотику решения линейной задачи Коши и сформулировать критерии устойчивости решения для с/в квазилинейных задач.

Ключевые слова: сингулярно возмущённые начальные задачи, метод расщепления, квазирегулярная асимптотика, устойчивость.

1. Введение

Для большого класса сингулярно возмущённых начальных задач для неавтономных линейных систем ОДУ с помощью конструктивного варианта метода расщепления при наличии стабильного спектра предельного оператора построена квазирегулярная асимптотика решения данных задач. В отличие от известного [1, 2] данная асимптотика более удобна для качественного и численного анализа. Приведены условия устойчивости решения с/в квазилинейных систем с T-периодической матрицей. Рассмотрен содержательный пример.

2. Алгебраический метод построения асимптотики решения с/в неавтономной линейной задачи

Анализ решения с/в задачи Коши для неавтономной линейной системы ОДУ вида:

$$\varepsilon\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon); \quad x(0,\varepsilon) = x_0 \tag{1}$$

($x, f \in \mathbb{R}^n$; $t \in [0,b]$; $\varepsilon > 0$), где векторный ряд $f(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(t)\varepsilon^k$ и матричный ряд $A(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k$ из достаточно гладких функции $f_k(t)$ и $A_k(t)$ сходятся абсолютно и равномерно при достаточно малых ε и при любом $t \in [0,b]$, являются в общем случае весьма непростой задачей [1,2] даже в регулярном ($\varepsilon = 1$) случае.

Принципиальные особенности и добавочные трудности возникают при исследовании так называемых с/в задач вида (1) с малым параметром $\varepsilon > 0$ перед производной.

В отличие от известных асимптотических методов анализа таких систем (см., например, [1,2]) в данной работе рассмотрен конструктивный алгебраический вариант метода расщепления [3–5] для исследования с/в задач вида (1) с учётом структуры спектра неавтономной матрицы $A_0(t)$.

Термин «сингулярность» в данном случае означает, что в общем случае решение предельной ($\varepsilon = 0$) алгебраической задачи (1) может не удовлетворять начальному условию.

Для удобства дальнейшего изложения, следуя методу расщепления [3–5], для произвольной квадрантной матрицы $A = \{a_{jk}\}_1^n$ введём специальные обозначения: для её «диагональной» части — $\overline{A} = \mathrm{diag}\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$ и «бездиагональной» части — $\overline{\overline{A}} = A - \overline{A}$.

Теорема 1. *Если спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_0^n$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет условиям:*

$$\sigma_{jk}(t) = \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0; \quad \lambda_{0j}(t) \neq 0; \quad \mathrm{Re}\,\lambda_{0j} \leqslant 0, \tag{2}$$

$(j \neq k; \quad j, k = \overline{1, n}; \quad t \in [0, b])$, *тогда существует единственное и равномерно ограниченное при $\varepsilon \to +0$ на отрезке $[0, b]$ решения с/в задачи Коши (1) и асимптотика её решения может быть представлена в квазирегулярной форме:*

$$x(t, \varepsilon) = S_0(t) H(t, \varepsilon) \Phi_{(N)}(t, \varepsilon) C + w_{(N)}(t, \varepsilon) =$$

$$= S_0(t) H(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int\limits_0^t \Lambda_0(s) \mathrm{d}s\right) \left(\sum_{k=0}^N F_k(t) \varepsilon^k\right) C + w_{(N)}(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}). \tag{3}$$

Здесь $S_0^{-1}(t) A_0(t) S_0(t) = \Lambda_0(t) = \mathrm{diag}\,\{\lambda_{01}(t), \ldots, \lambda_{0n}(t)\}$, $\varepsilon \dot{\Phi}_{(N)} = \Lambda(t, \varepsilon) \Phi_{(N)}(t, \varepsilon)$,

$$H(t, \varepsilon) = E + \sum_{k=1}^N \overline{\overline{H}}_k(t) \varepsilon^k; \quad \Lambda(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \Lambda_k(t) \varepsilon^k; \quad \Phi_{(N)} = \exp\left(\varepsilon^{-1} \int\limits_0^t \Lambda(s, \varepsilon) \mathrm{d}s\right);$$

$$w_{(N)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N w_k(t) \varepsilon^k,$$

где «диагональные» $\Lambda_k(t)$ и «бездиагональные» $\overline{\overline{H}}_k(t)$ матрицы и векторные функции $w_k(t), (k = \overline{0, N})$ однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма.

Доказательство. С учётом условий (2) $(\det A_0(t) \neq 0,\ t \in [0, b])$ вектор функции $w_k(t)$ компоненты аналога частного решения $w_{(N)}(t, \varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^N w_k(t) \varepsilon^k$ системы (1) однозначно определяются при непосредственной подстановке $w_{(N)}(t, \varepsilon)$ в систему (1) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε без учёта начальных условий. При этом имеем:

$$w_0(t) = -A_0^{-1}(t) f_0(t); \quad w_1(t) = A_0^{-1}(t)(\dot{w}_0(t) - A_1(t) w_0(t) - f_1(t))$$

и так далее.

После подстановки $x = v + w_{(N)}(t, \varepsilon)$ для функции $v(t, \varepsilon)$ получаем почти однородную с/в задачу Коши:

$$\varepsilon \dot{v} = A(t, \varepsilon) v + \varepsilon^{N+1} g(t, \varepsilon); \quad v(0, \varepsilon) = v_0; \quad (|g(t, \varepsilon)| < C_1). \tag{4}$$

Замена $v = S_0(t) y$ упрощает с/в задачу (4):

$$\varepsilon \dot{y} = B(t, \varepsilon) y + \varepsilon^{N+1} h(t, \varepsilon); \quad y(0, \varepsilon) = y_0. \tag{5}$$

Здесь $B(t, \varepsilon) = \Lambda_0(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k(t) \varepsilon^k; \quad |h(t, \varepsilon)| \leqslant C_2)$. При этом система (5) после невырожденного при достаточно малых ε преобразованиях $y = H(t, \varepsilon)$ приводится к почти диагональной системе:

$$\varepsilon\dot{z} = Q(t,\varepsilon)z + \varepsilon^{N+1}b(t,\varepsilon), \quad z(0,\varepsilon) = z_0,$$

$\Big(Q(t,\varepsilon) = \Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}R(t,\varepsilon);\ \Lambda(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=1}^{N}\Lambda_k(t)\varepsilon^k;\ \|b(t,\varepsilon)\| \leqslant C_3;\ |R(t,\varepsilon)| \leqslant C_4;\ t \in [0,b]\Big)$, если матрицы $B(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$ и $H(t,\varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальному матричному уравнению:

$$\varepsilon\dot{H} = B(t,\varepsilon)H(t,\varepsilon) - H(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon). \tag{6}$$

Приравнивая в (6) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим простые алгебраические однозначно разрешимые матричные уравнения вида:

$$\Lambda_0(t)\overline{\overline{H}}_k(t) - \overline{\overline{H}}_k(t)\Lambda_0(t) = \Lambda_k(t) - P_k(t)$$

$$\Big(P_1(t) = B_1(t); \quad P_k(t) = B_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1}(B_j(t)\overline{\overline{H}}_{k-j}(t) - \overline{\overline{H}}_{k-j}(t)\Lambda_j(t)) + \dot{\overline{\overline{H}}}_{k-1}(t)\Big),$$

откуда имеем

$$\Lambda_k(t) = \overline{P}_k(t); \quad P_k(t) = \{p_{ijk}(t)\}; \quad \overline{\overline{H}}_k(t) = \{h_{ijk}(t)\};$$

$$h_{ijk}(t) = -\sigma_{ij}^{-1}(t)p_{ijk}(t); \quad (i \neq j; \quad i,\, j = \overline{1,n}; \quad k = \overline{1,N}; \quad t \in [0,b]).$$

С учётом того, что матричная функция

$$R(t,\varepsilon) = B_1(t)\overline{\overline{H}}_N(t) - \sum_{j=1}^{N}\overline{\overline{H}}_j(t)\Lambda_{N+1-j}(t) - \dot{\overline{\overline{H}}}_N(t)$$

ограничена по норме $\|R(t,\varepsilon)\| \leqslant C$, $(t \in [0,b])$ и задача Коши (4) эквивалентна интегральному уравнению

$$z(t,\varepsilon) = \Phi_{(N)}(t,\varepsilon)\left(z_0 + \varepsilon^N\int\limits_0^t \Phi_{(N)}^{-1}(s,\varepsilon)[R(s,\varepsilon)z + b(t,\varepsilon)]\right)\mathrm{d}s \equiv Lz \tag{7}$$

со сжимающим оператором Lz, (где $|Lz_1 - Lz_2| \leqslant \varepsilon^N C_0|z_1 - z_2|$, $|z_0| < \sigma_0$, $\varepsilon^N C_0 < 1$), интегральное уравнение (7) и эквивалентная с/в начальная задача (1) имеют единственное и ограниченное в условиях теоремы (1) решение, представимое в квазирегулярной форме (3), что и требовалось доказать. □

3. Исследование с/в начальных линейных и квазилинейных задач для систем с T–периодической матрицей на полуоси

При анализе устойчивости решения с/в квазилинейной (и линейной) задачи Коши на полуоси:

$$\varepsilon\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon f(x,t); \quad x(0,\varepsilon) = x_0; \quad (f(0,t) \equiv 0; \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,+\infty]), \tag{8}$$

где матричный ряд $A(t,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k(t)\varepsilon^k$ из достаточно гладких T– периодических матричных функцией $A_k(t)$, $(k\geqslant 0)$ сходится абсолютно и равномерно по некоторой норме на полуоси $[0,\infty)$ и $f(x,t)$ – достаточно гладкая при $t\geqslant 0$ векторная функция.

При этом, если спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_0^n$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет условиям (2) теоремы 1, то в окрестности точки $t=0$ существует экспоненциальный погранслой, структура которого описана в теореме 1. Но в этом случае возникают непростые вопросы с описанием условий устойчивости решения для однородных и квазилинейных систем вида (8). Эта проблема решена в следующем утверждении, являющемся аналогом теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению для неавтономных квазилинейных систем с T-периодической матрицей.

Теорема 2. *Если T-периодическая матрица $A(t,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (включая условия (2)) и спектр $\{\lambda_j(t,\varepsilon)\}_1^n$ вспомогательной матрицы $\Lambda(t,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам:*

$$\operatorname{Re}\lambda_j(t,\varepsilon)\leqslant\varepsilon^q(-\sigma_0+\varphi(t));\ \left(j=\overline{1,n};\ \delta_0>0\,;\ \int\limits_0^t\varphi(s)\mathrm{d}s\leqslant C;\ t\geqslant 0;\ 0\leqslant q\leqslant N\right)$$

и если для функции $f(x,t)$ имеет место оценка $|f(x,t)|\leqslant C_5|x|^{1+\alpha}$; $(C_5,\ \alpha>0;\ |x|\leqslant R;\ t\geqslant 0)$, тогда тривиальное решение с/в линейной и квазилинейной задачи Коши (8) асимптотически устойчиво.

Перед доказательством теоремы 2 сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Для квадрата евклидовой нормы решения системы $\dot{x}=A(t)x$ справедливо дифференциальное равенство:*

$$\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{Re}\,(x^*A(t)x); \tag{9}$$

Доказательство. С учётом $\dot{x}^*=x^*A^*(t)$ и $|x|^2=x^*x$ запишем дифференциальное соотношение

$$\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(x^*x)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t}x+x^*\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^*A^*(t)x+x^*A(t)x=$$
$$=(x^*A(t)x)^*+(x^*A(t)x)=2\mathrm{Re}\,(x^*A(t)x),$$

что и завершает доказательство леммы. □

Доказательство (теоремы 2). С учётом соотношения (9) запишем дифференциальное неравенство для квадрата евклидовой нормы решения с/в задачи

$$\varepsilon\dot{z}=Q(t,\varepsilon)z+\varepsilon b(z,t,\varepsilon);\quad z(0,\varepsilon)=z_0;\quad (t\geqslant 0), \tag{10}$$

$$(Q(t,\varepsilon)=\Lambda(t,\varepsilon)+\varepsilon^{N+1}R(t,\varepsilon);\quad \|R(t,\varepsilon)\|\leqslant C),$$

эквивалентной виду $T.1$ с/в задаче (8). При этом имеем

$$\frac{\mathrm{d}|z|^2}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{Re}\,(z^*\Lambda(t,\varepsilon)z)\varepsilon^{-1}+2\mathrm{Re}\,(z^*\mathrm{Re}\,(t,\varepsilon)z)\varepsilon^N+2\mathrm{Re}\,(z^*b(z,t,\varepsilon))\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon^{q-1}(-\sigma_0+\varphi(t))|z|^2+\varepsilon^NC_0|z|^2+C_4|z|^{2+\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant((-\sigma_0+\varphi(t))\varepsilon^{q-1}+\varepsilon^NC_N)|z|^2+C_2|z|^{2+\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{q-1}(-\sigma_1 + \varphi(t))|z|^2; \quad (0 < \sigma_1 < \sigma_0).$$

Полученное неравенство приводит к оценке

$$|z(t,\varepsilon)| \leqslant |z_0| \exp\left(\varepsilon^{q-1}\int\limits_0^t (-\sigma_1 + \varphi(s))\right) \mathrm{d}s \to 0, \quad \text{когда} \quad t \to +\infty,$$

что и доказывает асимптотическую устойчивость тривиального решения с/в линейной и квазилинейной задачи (10) и эквивалентной ей задачи (8). □

Пример 1. Исследуем поведение решения с/в модельной квазилинейной задачи Коши о прохождении нервного импульса [6, с. 189]

$$\varepsilon\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon f(x); \quad x(0,\varepsilon) = x_0, \tag{11}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = ((-3\varepsilon x_1^2 - \varepsilon x_1 x_2 - \varepsilon^2 x_1^3), 0, 0)^T,$$

матрица A_0 имеет полупростую структуру со спектром $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 0$, т.е. в этом случае следует воспользоваться соответствующими аналогами теорем 1 и 2. После невырожденной замены $x = S_0 y$, где

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_0^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

система (11) принимает вид $\varepsilon\dot{y} = B(\varepsilon)y + \varepsilon h(y)$; $y(0,\varepsilon) = y_0$, где $B(\varepsilon) = \Lambda_0 + \varepsilon B_1$,

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Последующая невырожденная при достаточно малых $|\varepsilon| < 1$ замена $y = H(\varepsilon)z$; $(H(\varepsilon) = E + \varepsilon\widehat{\widehat{H}}_1)$ приводит в итоге задачу (11) к системе с «почти блочно диагональной» матрицей

$$\varepsilon\dot{z} = (\Lambda_0 + \varepsilon N_1 + O(\varepsilon^2)) + \varepsilon b(z,\varepsilon); \quad z(0,\varepsilon) = z_0,$$

где $N_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$. При этом матрица $N_{12} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ имеет простой спектр $\nu_{1,2} = 1/2(-1 \pm i\sqrt{3})$. Это позволяет после замены $z = S_1 v$ (в силу теоремы 1) перейти к системе с почти диагональной матрицей

$$\varepsilon\dot{v} = (\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + O(\varepsilon^2))v + \varepsilon g(v,\varepsilon); \quad v(0,\varepsilon) = v_0, \tag{12}$$

что (с учётом теоремы 2) гарантирует асимптотическую устойчивость с/в системы (12) и эквивалентной ей системы (11), ибо спектр $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^3$ «усечённой» матрицы

$\Lambda(\varepsilon) = \Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1$:

$$\lambda_1 = -2 - \varepsilon + O(\varepsilon^2); \quad \lambda_{2,3} = \frac{\varepsilon}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) + O(\varepsilon^2)$$

лежит в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda_j(\varepsilon) \leqslant -\varepsilon/2 < 0, (j = 1, 2, 3)$.

4. Заключение

Показана эффективность (отличного от ранее известных [1, 2]) асимптотического метода анализа с/в линейных и квазилинейных систем, в основе которого лежит алгебраический вариант метода расщепления [3, 5].

Литература

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с. [*Lomov S. A.* Vvedenie v obthuyu teoriyu singulyarnihkh vozmutheniyj. — M.: Nauka, 1981. — 400 s.]
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — Высшая школа, 1990. — 280 с. [*Vasiljeva A. B., Butuzov V. F.* Asimptoticheskie metodih v teorii singulyarnihkh vozmutheniyj. — Vihsshaya shkola, 1990. — 280 s.]
3. *Коняев Ю. А.* Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений // Математический сборник. — 1993. — Т. 184, № 12. — С. 133–144. [*Konyaev Yu. A.* Ob odnom metode issledovaniya nekotorihkh zadach teorii vozmutheniyj // Matematicheskiyj sbornik. — 1993. — T. 184, No 12. — S. 133–144.]
4. *Коняев Ю. А.* Об однозначной разрешимости некоторых классов нелинейных регулярных и с/в краевых задач // Дифференциальные уравнения. — 1999. — Т. 35, № 8. — С. 1028–1032. [*Konyaev Yu. A.* Ob odnoznachnoyj razreshimosti nekotorihkh klassov nelineyjnihkh regulyarnihkh i s/v kraevihkh zadach // Differencialjnihe uravneniya. — 1999. — T. 35, No 8. — S. 1028–1032.]
5. *Коняев Ю. А.* Теории возмущений в прикладных задачах. — М.: Издательство МЭИ, 1990. — 60 с. [*Konyaev Yu. A.* Teorii vozmutheniyj v prikladnihkh zadachakh. — M.: Izdateljstvo MEhI, 1990. — 60 s.]
6. *Эрроусмит Д., Плейс К.* ОДУ. — М.: Мир, 1986. — 248 с. [*Ehrrousmit D., Pleyjs K.* ODU. — M.: Mir, 1986. — 248 s.]

UDC 517.925

The Study of Splitting Method of Singularly Perturbed Initial Value Problems for Non-Autonomous Systems of ODE

A. Z. Workneh

Department of Mathematics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

With the help of non-autonomous version of the method of Splitting with new point of view, the paper studied singularly perturbed initial value problems for model systems of *ODE*. The proposed method will allow us to construct quasi-regular asymptotic solutions for linear Cauchy Problems and to formulate criteria for the stability of singularly perturbed quasi-linear problems.

Key words and phrases: singularly perturbed initial value problems, splitting method, quasi-regular asymptotic, stability.