

---

# Математическая теория телетрафика

УДК 621.39

## Математическая модель центра обслуживания вызовов с двумя типами абонентов

Э. Р. Зарипова

*Кафедра систем телекоммуникаций  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Информационные и справочные службы, страховые компании, а также многие другие организации используют для связи с клиентами центры обслуживания вызовов (ЦОВ). Абоненты компаний могут получить необходимую информацию у оператора или использовать автоматизированное меню. Для качественного обслуживания важных для компании абонентов общий поток всех вызовов может быть разделен на два различных типа по заданному критерию. В статье представлена математическая модель центра обслуживания вызовов с двумя типами абонентов и тремя различными по квалификации группами обслуживающих операторов, получены формулы для расчёта вероятностных характеристик модели. На численном примере исследована эффективность работы системы в случае введения дополнительной группы операторов для обслуживания абонентов обоих типов. Результаты работы могут быть применены для анализа функционирования малых ЦОВ с числом операторов до нескольких десятков.

**Ключевые слова:** центр обслуживания вызовов, качество обслуживания абонентов, марковская модель, вероятностные характеристики.

### 1. Введение

Операторы, обслуживающие вызовы абонентов в ЦОВ, могут быть поделены на группы в соответствии с навыками, которыми они обладают. В качестве примера навыка можно рассмотреть знание какого-либо иностранного языка. Справочная служба банка или страховой компании может разделить операторов, работающих с физическими лицами, юридическими лицами, а также с теми и другими. В настоящее время почти все операторы владеют более чем одним навыком, например, в многоязычном ЦОВ оператор может владеть несколькими языками. Разделение операторов на группы полезно только в том случае, если в ЦОВ существует автоматическая система распределения вызовов (СРВ), где абонент компании может самостоятельно выбрать, какой вид услуги он хочет получить, и вызов автоматически направляется к выбранной группе операторов. Для каждой группы операторов может быть образована своя очередь [1–3]. При выделении для каждого навыка отдельной очереди и отдельной группы операторов ЦОВ может быть реализован в виде совокупности независимых параллельно работающих малых ЦОВ, но экономически такой центр становится не выгодным, так как ресурсы операторов не используются в полную меру. Если абоненты компании не делятся на типы и обслуживаются первым не занятым оператором, необходимо многократное переключение абонента с одного оператора на другого для того, чтобы предоставить необходимую абоненту услугу. Для оптимального решения задачи, связанной с несколькими навыками операторов ЦОВ, предлагается вводить алгоритмы маршрутизации вызовов к разным группам операторов. Если для обслуживания всей нагрузки используется фиксированное число операторов, то целесообразно рассматривать только пиковые нагрузки для определения размера штата.

При проектировании ЦОВ разработчики сталкиваются с проблемой планирования структуры, выбора числа операторов в группах, соответствующей квалификации операторов. Наличие разных навыков у операторов и предоставление

разных услуг делает организацию центра обслуживания вызовов более сложной и требует разработки новых моделей. Изменение структуры ЦОВ влияет на качество обслуживания абонентов и степень их удовлетворённости.

В продолжение работ российских [1, 4] и зарубежных [2, 3] авторов исследуется математическая модель ЦОВ с двумя типами абонентов и тремя группами операторов, разделённых по их квалификации. Для модели выведены вероятностные характеристики, исследована возможность «переобучения» персонала для обслуживания вызовов любого типа с целью уменьшения вероятности потерь вызовов до заданной величины.

## 2. Построение модели ЦОВ

В статье исследуется математическая модель ЦОВ, в который поступают вызовы от двух типов абонентов, первый из которых обладает относительным приоритетом. Вызовы, поступающие в ЦОВ, обслуживаются тремя группами операторов (см. рис. 1). В первую группу входят  $c_1$  операторов, обслуживающих только вызовы первого приоритетного типа абонентов, во вторую группу входят  $c_2$  операторов, обслуживающих только вызовы второго типа абонентов, а в третью группу операторов входят  $c_3$  операторов, которые обслуживают абонента любого типа, если все операторы его типа заняты. Число вызовов первого (второго) типа, находящихся на обслуживании в ЦОВ и ожидающих в системе, ограничено числом  $K_1$  ( $K_2$ ),  $K_m > c_m + c_3$ ,  $m = 1, 2$ .

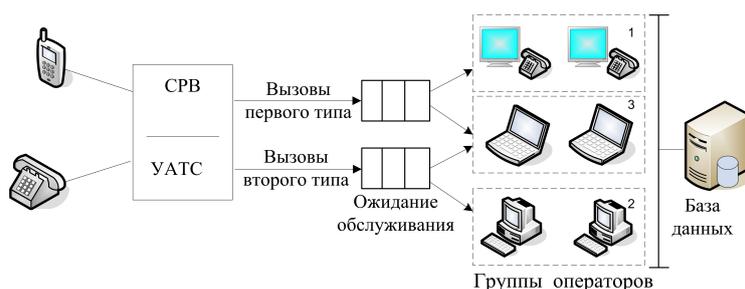


Рис. 1. Схема обслуживания вызовов

Вызов, поступивший в ЦОВ, направляется на СРВ. При поступлении вызова в систему возможны следующие варианты:

- а) вызов первого (второго) типа сразу направляется на обслуживание к своему свободному оператору;
- б) вызов первого (второго) типа сразу направляется на обслуживание к свободному оператору из третьей группы, так как все операторы из своей группы заняты;
- в) вызов первого (второго) типа ожидает обслуживания в своей очереди, если заняты все операторы первой (второй) и третьей группы ЦОВ, но есть хотя бы одна свободная соединительная линия;
- г) вызов блокируется, т.е. получает отказ в обслуживании, если заняты все соединительные линии, которые могут его обслужить.

Описывая математическую модель в терминах теории массового обслуживания [5, 6], предположим, что вызов первого (второго) типа является 1-заявкой (2-заявкой), операторы, обслуживающие абонентов первого (второго) типа — приборами первой (второй) группы, операторы, обслуживающие оба типа вызовов — приборами третьей группы, длительность обслуживания абонента оператором — временем обслуживания заявки. Поступающие в ЦОВ потоки вызовов в математической модели могут быть представлены Пуассоновскими потоками с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Среднее время обслуживания 1-заявки на приборе первой группы

распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu_1$ , среднее время обслуживания 2-заявки на приборе второй группы — с параметром  $\mu_2$ ; среднее время обслуживания 1-заявки и 2-заявки на приборе третьей группы распределено по экспоненциальному закону с параметрами  $\tilde{\mu}_1$  и  $\tilde{\mu}_2$  соответственно.

Определим  $\mathbf{X}(t) = \{(X_1(t), X_2(t), Y_1(t), Y_2(t))\}$  — марковский процесс (МП), описывающий состояние системы в момент  $t \geq 0$ , где  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  — общее число 1- и 2-заявок в системе соответственно;  $Y_1(t)$  и  $Y_2(t)$  — число 1- и 2-заявок, обслуживаемых приборами третьей группы.

Для описания пространства состояний введём индикаторные функции  $I_1$  и  $I_2$ . Пусть  $I_1 = I_1(i > c_1 + k) = 1$ , если верно событие  $i > c_1 + k$ , т. е. в первой очереди есть ожидающие 1-заявки. В обратном случае  $I_1 = 0$ . Аналогично  $I_2 = I_2(j > c_2 + l) = 1$ , если верно событие  $j > c_2 + l$ , т. е. во второй очереди есть ожидающие 2-заявки. В обратном случае  $I_2 = 0$ .

Использование индикаторных функций позволяет удобно записать пространство  $\mathcal{S}$  возможных состояний системы, которое разбивается на четыре подпространства  $\mathcal{S} = \bigcup_{m=1}^4 \mathcal{S}_m$  в зависимости от наличия ожидающих вызовов первого и второго типов:

$$\mathcal{S}_1 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{S} : I_1 = 1, I_2 = 1\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{S} : I_1 = 1, I_2 = 0\}, \\ \mathcal{S}_3 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{S} : I_1 = 0, I_2 = 1\}, \quad \mathcal{S}_4 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{S} : I_1 = 0, I_2 = 0\},$$

где  $i \geq 0, j \geq 0, k \geq 0, l \geq 0$ .

К примеру, для значений  $c_1 = c_2 = c_3 = 1, K_1 = 3$  и  $K_2 = 2$  разбиение пространства  $\mathcal{S}$  представлено следующим образом:

$$\mathcal{S}_1 = \{(3, 2, 1, 0)\}, \\ \mathcal{S}_2 = \{(2, 2, 0, 1), (2, 1, 0, 1), (3, 2, 0, 1), (3, 0, 1, 0), (3, 1, 1, 0), (3, 1, 0, 1)\}, \\ \mathcal{S}_3 = \{(2, 2, 1, 0), (1, 2, 1, 0)\}, \\ \mathcal{S}_4 = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), \\ (2, 0, 1, 0), (2, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 2, 0, 1), (1, 2, 0, 1) \end{array} \right\}.$$

Пусть  $p(i, j, k, l) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{X(t) = (i, j, k, l)\}$  определяет стационарное распределение вероятностей МП  $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ , которое находится из системы уравнения глобального баланса (СУГБ).

Для иллюстрации ниже приведён фрагмент СУГБ для состояний из подпространства  $\mathcal{S}_2$ , в которое попадают состояния  $(i, j, k, l) \in \mathcal{S}$ , где есть ожидающие 1-заявки, и нет ожидающих 2-заявок. Все приборы третьей группы заняты, они обслуживают  $k$  заявок первого типа и  $l = c_3 - k$  заявок второго типа. Число занятых приборов первой группы равно  $c_1$ . Число приборов, занятых обслуживанием 2-заявок —  $j - l \leq c_2$ . Для состояний  $(i, j, k, l)$  из подпространства  $\mathcal{S}_2$  справедливы следующие соотношения:

$$c_1 + k < i \leq K_1, \quad l \leq j \leq c_2 + l, \quad 0 \leq k \leq c_3, \quad l = c_3 - k. \quad (1)$$

Для состояний из подпространства  $\mathcal{S}_2$  СУГБ имеет вид

$$[\lambda_1 U(K_1 - i) + \lambda_2 U(K_2 - j) + c_1 \mu_1 + k \tilde{\mu}_1 + (j - l) \mu_2 + l \tilde{\mu}_2] p(i, j, k, l) = \\ = \lambda_1 p(i - 1, j, k, l) + \lambda_2 U(j - l) p(i, j - 1, k, l) + \\ + (c_1 \mu_1 + k \tilde{\mu}_1) U(K_1 - i) p(i + 1, j, k, l) + \\ + [c_2 \mu_2 (1 - U(c_2 - j + l)) + \mu_2 (j + 1 - l) U(c_2 - j + l)] p(i, j + 1, k, l) + \\ + [(l + 1) \tilde{\mu}_2 U(k)] p(i, j + 1, k - 1, l + 1), \quad (i, j, k, l) \in \mathcal{S}_2, \quad (2)$$

где  $U(x)$  — функция Хевисайда. Аналогично можно получить уравнения глобального баланса для состояний из подпространств  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ .

### 3. Вероятностные характеристики модели

Основными вероятностными характеристиками модели являются вероятности блокировок 1- и 2-заявок, средние длины очередей ожидающих обслуживания заявок и вероятности немедленного обслуживания 1- и 2-заявок. Определим множество блокировок 1-заявок и 2-заявок:

$$\mathcal{B}_1 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{S} : (i, j, k, l) \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2, i = K_1\}, \quad (3)$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{S} : (i, j, k, l) \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_3, j = K_2\}. \quad (4)$$

Тогда вероятность блокировки  $m$ -заявок вычисляется по формуле (5).

$$B_m = \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{B}_m} p(i, j, k, l), \quad m = 1, 2. \quad (5)$$

Поскольку в состоянии  $(i, j, k, l) \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  длина очереди 1-заявок равна  $i - k - c_1$ , тогда средняя длина очереди ожидающих 1-заявок вычисляется по формуле

$$L_1 = \sum_{(i,j,k,l) \in (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)} (i - k - c_1) p(i, j, k, l), \quad (6)$$

а средняя длина очереди ожидающих 2-заявок, аналогично, по формуле

$$L_2 = \sum_{(i,j,k,l) \in (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_3)} (j - l - c_1) p(i, j, k, l). \quad (7)$$

Рассмотрим случайные величины  $w_1$  и  $w_2$  — длительности ожидания 1-заявкой и 2-заявкой начала обслуживания. Если заявка первого типа поступает на обслуживание немедленно, то время ожидания  $w_1$  равно 0. В этом случае в системе должен быть хотя бы один свободный прибор для обслуживания 1-заявки. Тогда вероятность немедленного обслуживания 1-заявки вычисляется по формуле

$$P(w_1 = 0) = \sum_{\substack{(i,j,k,l) \in \mathcal{S}_3 : \\ i \neq c_1 + k}} p(i, j, k, l) + \sum_{\substack{(i,j,k,l) \in \mathcal{S}_4 : \\ i \neq c_1 + k \vee c_3 \neq k + l}} p(i, j, k, l), \quad (8)$$

а вероятность немедленного обслуживания 2-заявки, аналогично, по формуле

$$P(w_2 = 0) = \sum_{\substack{(i,j,k,l) \in \mathcal{S}_2 : \\ j \neq c_2 + l}} p(i, j, k, l) + \sum_{\substack{(i,j,k,l) \in \mathcal{S}_4 : \\ j \neq c_2 + l \vee c_3 \neq k + l}} p(i, j, k, l). \quad (9)$$

### 4. Примеры численного анализа

Опыт работы с ЦОВ показывает, что почти все они не требуют большого числа операторов и соединительных линий для обслуживания вызовов, поступающих от абонентов. Для примеров были выбраны исходные данные ЦОВ с числом операторов  $c_1 + c_2 + c_3 \leq 22$  [1, гл. 1].

Для первого примера предположим, что в среднем оператор первой группы обслуживает одного абонента 180 с, оператор второй группы — 210 с, оператор третьей группы обслуживает один приоритетный вызов 120 с, а неприоритетный вызов — 90 с. В ЦОВ поступает в среднем 550 вызовов в час, причём 200 из них

являются приоритетными. Вызовы обслуживают семь операторов второй группы и пять операторов третьей группы. Для обслуживания вызовов первого типа выделено 18 телефонных линий, а для обслуживания вызовов второго типа — 16 линий. Таким образом, в введённых в статье обозначениях исходные данные имеют вид:  $c_2 = 7$ ,  $c_3 = 5$ ,  $c_1 = [5; 10]$ ,  $K_1 = 18$ ,  $K_2 = 16$ ,  $\lambda_1 = 0,05$ ,  $\lambda_2 = 0,09$ ,  $\mu_1 = 1/180$ ,  $\mu_2 = 1/210$ ,  $\tilde{\mu}_1 = 1/120$ ,  $\tilde{\mu}_2 = 1/90$ . На рис. 2 изображена зависимость вероятностей блокировок обоих типов вызовов от числа операторов первой группы.

Анализ математической модели для описанной выше ЦОВ показывает, что при росте операторов первой группы уменьшается число ожидающих вызовов первого типа, новые вызовы реже теряются, так как могут быть приняты в центр (см. рис. 2). Вызовам второго типа выделяется больше операторов третьей группы, и их вероятность блокировки также незначительно падает. Решая задачу об оптимальном числе операторов для обслуживания вызовов первого типа, в исследуемом примере получены следующие результаты: при пяти операторах первой группы вызовы первого типа теряются в 12 % случаев, а при добавлении одного оператора в первую группу теряется лишь 6 % поступающих вызовов. Вызовы второго типа при этих данных обслуживаются успешно в 99 % случаев.

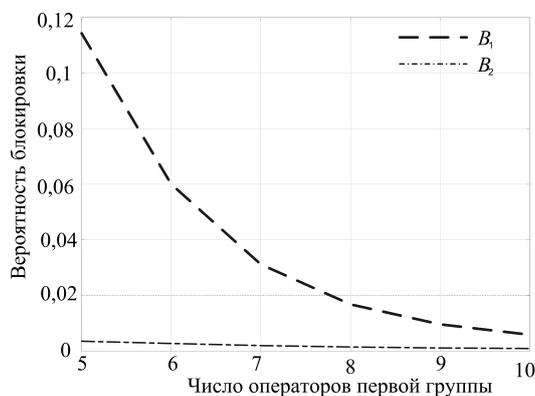


Рис. 2. Вероятности блокировок вызовов обоих типов

Рассмотрим второй пример численного анализа. Проанализируем ситуацию, когда в ЦОВ поступает в час 200 вызовов первого типа и 150 вызовов второго типа, при этом оператор первой группы обслуживают один вызов в среднем 180 с, оператор второй группы — 210 с, а оператор третьей группы обслуживают вызов любого типа в среднем 120 с. Для обслуживания приоритетных вызовов выделено 15 телефонных линий, для неприоритетных — 13. Будем считать, что общее число операторов неизменно. Число операторов в третьей группе будет увеличиваться от 0 до 8 с шагом 2, при этом одновременно число операторов в первой и второй группе будет уменьшаться на единицу. Это соответствует ситуации, когда операторы из первой и второй группы получают дополнительные навыки и переквалифицируются в операторов третьей группы. Для такой задачи исходные данные представлены следующим образом:  $K_1 = 15$ ,  $K_2 = 13$ ,  $\lambda_1 = 1/18$ ,  $\lambda_2 = 1/24$ ,  $\mu_1 = 1/180$ ,  $\mu_2 = 1/210$ ,  $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = 1/120$ , начальные значения  $c_1 = 8$ ,  $c_2 = 5$ ,  $c_1 + c_2 + c_3 = \text{const}$ . На рис. 3 изображён график зависимости средней длины очереди поступающих в ЦОВ вызовов от числа операторов в третьей группе.

В случае, когда в ЦОВ отсутствует третья группа операторов, обслуживания ожидают два вызова первого типа и четыре вызова второго типа. Если перевести трёх операторов первой группы и трёх операторов второй группы в шесть операторов третьей группы, то среднее число ожидающих вызовов первого типа не превысит 1, а среднее число ожидающих вызовов второго типа составит не более двух. Руководитель ЦОВ может самостоятельно принять решение о необходимости повышения квалификации нескольких операторов узкого профиля. Для

расчёта первого и второго примеров использовались формулы из раздела 3, причём СУГБ решалась численно методом простых итераций.

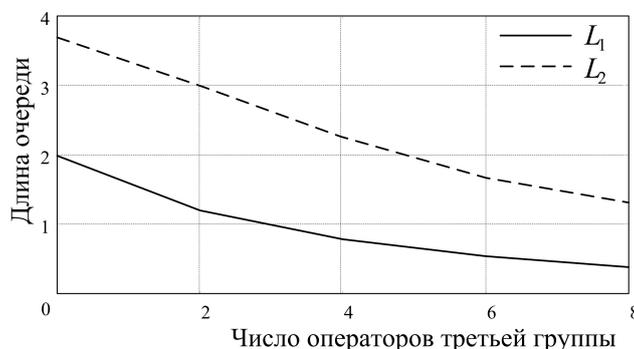


Рис. 3. Средние длины очередей в ЦОВ

## 5. Заключение

В статье исследована модель ЦОВ с двумя типами поступающих вызовов и тремя группами обслуживающих операторов, представлены формулы для расчёта вероятностных характеристик, проведён численный анализ модели. По сравнению с [3] получены упрощённые формулы для средних длин очередей, однако в [3] была исследована модель с нетерпеливыми заявками.

В дальнейшем планируется исследовать модель контакт-центра, где кроме голосовых вызовов операторы обслуживают также текстовые сообщения. Исследование ЦОВ более чем с двумя входящими потоками вызовов аналитически затруднительно из-за большого числа параметров. Интересной задачей является разработка имитационных моделей для оценки характеристик функционирования таких ЦОВ.

## Литература

1. Росляков А. В., Ваняшин С. В. Математические модели центров обслуживания вызовов. — М.: Ириас, 2006. — 336 с. [Roslyakov A. V., Vanyashin S. V. Matematicheskie modeli centrov obsluzhivaniya vyzovov. — М.: Iriasy, 2006. — 336 s.]
2. Koole G., Pot A. An Overview of Routing and Staffing Algorithms in Multi-Skill Customer Contact Centers. Working: Techrep / Vrije Universiteit Amsterdam, Netherlands. — 2006.
3. Stolletz R. Performance Analysis and Optimization of Inbound Call Centers. — Springer, 2003. — Pp. 97–138.
4. Гольдштейн Б. С., Фрейнкман В. А. Call-центры и компьютерная телефония. — СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 2002. — 372 с. [Goljdshteyjn B. S., Freynjnkman V. A. Call-centrih i kompjyuternaya telefoniya. — SPb.: BKhV – Sankt-Peterburg, 2002. — 372 s.]
5. Башарин Г. П. Лекции по математической теории телетрафика: Учеб. пособие. — Изд. 3-е издание. — М.: РУДН, 2009. — 342 с. [Basharin G. P. Lekcii po matematicheskoyj teorii teletrafika: Ucheb. posobie. — Izd. 3-e izdaniye. — М.: RUDN, 2009. — 342 s.]
6. Наумов В. А., Самуйлов К. Е., Яркина Н. В. Теория телетрафика мульти-сервисных сетей: Монография. — М.: РУДН, 2007. — 191 с. [Naumov V. A., Samujlov K. E., Yarkina N. V. Teoriya teletrafika multjiservisnihkh seteyj: Monografiya. — М.: RUDN, 2007. — 191 s.]

UDC 621.39

## Mathematical Model of a Call-Center with Two Customer Classes

**E. R. Zaripova**

*Telecommunication Systems Department  
Peoples' Friendship University of Russia  
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

Most information services contact with their clients through the call-centers. In this paper, we give a mathematical model of a call-center with two customer classes and three skill-based agent groups. Customers of each class are served not only by the one-skilled agent group but by one two-skilled agent group too. We propose formulas to obtain the main model performance measures such as blocking probabilities, mean queue lengths and probabilities of receiving service immediately. A computational example shows that the proposed model is more effective than the model with one-skilled agent groups.

**Key words and phrases:** call-center, Markov model, quality of service, performance measures.