УДК 517.968:519.6

О существовании и единственности решения одного сингулярного интегродифференциального уравнения

Э. Н. Замега (Самойлова)

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

В работе приводятся достаточные условия существования и единственности решения сингулярного интегродифференциального уравнения I-го порядка в различных парах функциональных пространств с соответствующим теоретическим обоснованием. Также установлена скорость сходимости приближенного решения в зависимости от структурных свойств исходных данных.

Ключевые слова: сингулярное интегродифференциальное уравнение, функциональные пространства, теоремы существования и единственности, устойчивость решения.

1. Введение

В данной статье для уравнения

$$A\varphi \equiv \varphi'(t) + \alpha(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau - t} = f(t), \quad -1 < t < 1, \tag{1}$$

с начальным условием

$$\varphi(-1) = 0, \tag{2}$$

предлагаются доказательства теорем существования и единственности решения в парах функциональных пространств $(C^1[-1,1]; C[-1,1])$ и $(W_2^1[-1,1]; L_2[-1,1])$. Здесь $a(t), b(t), f(t)$ — известные функции на сегменте $[-1,1]$, а $\varphi(t)$ — искомая функция, причём сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу (см., например, [1–3]).

2. Предварительные результаты

Приведём ряд используемых далее функциональных пространств и нормы в них:

1) $C[-1,1] \equiv C$ — пространство всех непрерывных на $[-1,1]$ функций с обычной нормой
$$\|f\|_C = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|f(t)|, \quad f \in C;$$

2) $C^1[-1,1] \equiv C^1$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (2), норма в нём определяется следующим образом
$$\|\varphi\|_{C^1} = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\varphi'(t)|, \quad \varphi \in C^1;$$

Статья поступила в редакцию 10 декабря 2010 г.

3) $L_2[-1,1] \equiv L_2$ — пространство всех измеримых функций, интегрируемых по Лебегу в промежутке $[-1,1]$, с нормой

$$\|f\|_{L_2} = \left\{ \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad f \in L_2;$$

4) $W_2^1[-1,1] \equiv W_2^1$ — пространство всех непрерывных на $[-1,1]$ функций, удовлетворяющих условию (2), имеющих там первые обобщённые производные, квадратично суммируемые по Лебегу. При этом норма определяется по формуле

$$\|\varphi\|_{W_2^1} = \left\{ \int_{-1}^{1} |\varphi'(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi \in W_2^1.$$

Все эти пространства являются полными (см., например, [1]).

В дальнейшем существенным образом будут использованы следующие леммы:

Лемма 1. *Для любой функции $\varphi \in W_2^1$ справедливо представление*

$$\pi S(\varphi; t) = \varphi(+1) \ln(1-t) - \int_{-1}^{1} \varphi'(\xi) \ln|\xi - t| \, \mathrm{d}\xi, \quad -1 \leqslant t < 1. \tag{3}$$

Доказательство. В силу (2) для любой функции $\varphi \in W_2^1$ имеем

$$\varphi(\tau) = \int_{-1}^{\tau} \varphi'(\xi) \mathrm{d}\xi, \quad \tau \in [-1,1]. \tag{4}$$

Отсюда с учётом (2) последовательно находим

$$\pi S(\varphi; t) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t} \int_{-1}^{\tau} \varphi'(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} \varphi'(\xi) \mathrm{d}\xi \int_{\xi}^{1} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \varphi'(\xi) \ln \frac{1-t}{|\xi - t|} \mathrm{d}\xi = \ln(1-t) \int_{-1}^{1} \varphi'(\xi) \mathrm{d}\xi - \int_{-1}^{1} \ln|\xi - t| \varphi'(\xi) \mathrm{d}\xi =$$

$$= \ln(1-t)\varphi(+1) - \int_{-1}^{1} \varphi'(\xi) \ln|\xi - t| \mathrm{d}\xi, \quad t \in [-1,1).$$

Таким образом, получили требуемое равенство. □

Аналогичное утверждение можно получить из известных результатов Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили (см., например, [4, 5]), но лишь для функций $\varphi(t)$, имеющих непрерывные производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем $0 < \mu \leqslant 1$. Однако здесь, во-первых, функция $\varphi(t)$ из класса W_2^1 и во-вторых, доказательство получено другим способом.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_{-1}^{1}|\ln|\tau-t||\,\mathrm{d}\tau=2. \tag{5}$$

Доказательство. Отметим, что интеграл $\int\limits_{-1}^{1}|\ln|\tau-t||\,\mathrm{d}\tau\equiv I$ является симметричной непрерывной функцией относительно $t\in[-1,1]$. Сначала рассмотрим случай $t\in[0,1]$. Представим интеграл I в виде суммы двух интегралов:

$$I=\int\limits_{-1}^{t}|\ln(t-\tau)|\mathrm{d}\tau+\int\limits_{t}^{1}|\ln(\tau-t)|\mathrm{d}\tau,$$

для вычисления которых сделаем замену переменной $t-\tau=\sigma$ — в первом интеграле и $\tau-t=s$ — во втором. Таким образом, получаем:

$$I=-\int\limits_{t+1}^{0}|\ln\sigma|\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{0}^{1-t}|\ln s|\mathrm{d}s=\int\limits_{0}^{1-t}|\ln\sigma|\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{0}^{t+1}|\ln\sigma|\mathrm{d}\sigma=$$
$$=2-2t-(1-t)\ln(1-t)+(1+t)\ln(1+t)\equiv f(t),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Найдём наибольшее значение функции $f(t)$ на промежутке $[0,1]$ и $[-1,0]$:

$$f(0)=2,\quad f(1)=2\ln 2,\quad f'(t)=\ln(1-t^2).$$

Пусть $f'(t)=0$. Тогда $\ln(1-t^2)=0$ при $t=0$. Следовательно,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_{-1}^{1}|\ln|\tau-t||\,\mathrm{d}\tau=2.$$

Теперь найдём наибольшее значение функции $f(t)$ в промежутке $[-1,0]$. Имеем

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 0}\int\limits_{-1}^{1}|\ln|\tau-t||\,\mathrm{d}\tau=\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\int\limits_{-1}^{1}|\ln|\tau+s||\,\mathrm{d}\tau,$$

где $s=-t$. Переходя к новым переменным $\tau=-\sigma,\mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}\sigma$, получим

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 0}\int\limits_{-1}^{1}|\ln|\tau-t||\,\mathrm{d}\tau=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_{-1}^{1}|\ln|\tau-t||\,\mathrm{d}\tau,$$

т.е. пришли к предыдущему случаю, таким образом,

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 0}\int\limits_{-1}^{1}|\ln|\tau-t||\,\mathrm{d}\tau=2.$$

3. Теоремы существования и единственности решения

Приведём достаточные условия существования и единственности решения задачи (1)–(2) в парах функциональных пространств $(C^1[-1,1]; C[-1,1])$ и $(W_2^1[-1,1]; L_2[-1,1])$.

Теорема 1. *Пусть* $a(t), f(t) \in L_2[-1,1]$ *и* $b(t) \in C$, $q_1 = \sqrt{2}\,\{\|a\|_{L_2} + \|b\|_C\} < 1$. *Тогда задача (1)–(2) имеет единственное решение* $\varphi^* \in W_2^1$ *при любой правой части* $f(t) \in L_2$ *и*

$$\|\varphi^*\|_{W_2^1} \leqslant \frac{\|f\|_{L_2}}{1-q_1}.$$

Доказательство. Представим задачу (1)–(2) в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$A\varphi \equiv G\varphi + T\varphi = f(\varphi \in W_2^1, f \in L_2), \tag{6}$$

где $G\varphi = \varphi'(t)$, $T\varphi = a\varphi + bS\varphi$.

Оператор $G : W_2^1 \to L_2$ непрерывно обратим и является линейной изометрией, при этом

$$\|G\|_{W_2^1 \to L_2} = \|G^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} = 1. \tag{7}$$

Действительно, используя введённые выше нормы, имеем

$$\|\varphi\|_{W_2^1} = \|G\varphi\|_{L_2} = \|\varphi'\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}.$$

Из первого равенства получаем

$$\frac{\|G\varphi\|_{L_2}}{\|\varphi\|_{W_2^1}} = 1, \quad \varphi \in W_2^1,$$

тогда по определению нормы оператора:

$$\|G\|_{W_2^1 \to L_2} = \sup_{\varphi \in W_2^1, \|\varphi\|_{W_2^1} = 1} \frac{\|G\varphi\|_{L_2}}{\|\varphi\|_{W_2^1}} = \sup_{\varphi \in W_2^1, \|\varphi\| = 1} \|G\varphi\|_{W_2^1} = 1.$$

По предположению $G\varphi = \varphi'(t) = f(f \in L_2, \varphi \in W_2^1)$ при условии (2). Функция $\varphi(t)$ представима в виде $\varphi(t) = G^{-1}f = \int\limits_{-1}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$, тогда из равенства $\|G^{-1}f\|_{W_2^1} = \|f\|_{L_2}$ следует, что $\|G^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} = 1$. Таким образом, получили равенство (7). Поэтому уравнение (6) эквивалентно следующему операторному уравнению

$$K\varphi \equiv \varphi + G^{-1}T\varphi = G^{-1}f(\varphi, G^{-1}f \in W_2^1). \tag{8}$$

С помощью соответствующих результатов работы [3] для оператора $T : W_2^1 \to L_2$ и любых $\varphi \in W_2^1$ последовательно находим

$$\|T\varphi\|_{L_2} = \|a\varphi + bS\varphi\|_{L_2} \leqslant \|a\varphi\|_{L_2} + \|bS\varphi\|_{L_2} \leqslant \|a\|_{L_2} \cdot \|\varphi\|_C + \\ + \|b\|_C \cdot \|S\varphi\|_{L_2} \leqslant \|a\|_{L_2} \cdot \|\varphi\|_C + \|b\|_C \cdot \|S\|_{L_2 \to L_2} \cdot \|\varphi\|_{L_2}. \tag{9}$$

Представим функцию $\varphi(t) \in W_2^1$ в виде

$$\varphi(t) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi'(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad t \in [-1, 1].$$

Тогда для любых $t \in [-1, 1]$ имеют место следующие оценки

$$|\varphi(t)| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |\varphi'(\xi)|\mathrm{d}\xi \leqslant \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} |\varphi'(\xi)|^2\mathrm{d}\xi} \cdot \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\xi} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} |\varphi'(\xi)|^2\mathrm{d}\xi} \cdot \sqrt{1+t} \leqslant \sqrt{2}\|\varphi\|_{W_2^1}, \quad \varphi \in W_2^1. \quad (10)$$

Воспользовавшись оценками (10), получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} |\varphi(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \|\varphi\|^2_{W_2^1} \cdot \int\limits_{-1}^{1} (1+t)\mathrm{d}t = 2\|\varphi\|^2_{W_2^1}, \quad \|\varphi\|_{L_2} \leqslant \sqrt{2}\|\varphi\|_{W_2^1}, \quad \varphi \in W_2^1. \quad (11)$$

Из соотношений (9)–(11) имеем

$$\|T\varphi\|_{L_2} \leqslant \|a\|_{L_2} \cdot \|\varphi\|_C + \|b\|_C \cdot \|\varphi\|_{L_2} \leqslant \sqrt{2}\|\varphi\|_{W_2^1} \cdot \{\|a\|_{L_2} + \|b\|_C\}, \quad \varphi \in W_2^1.$$

Отсюда, с учётом (7), находим неравенства

$$\|G^{-1}T\|_{W_2^1 \to W_2^1} \leqslant \|G^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} \cdot \|T\|_{W_2^1 \to L_2} = \|T\|_{W_2^1 \to L_2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\,\{\|a\|_{L_2} + \|b\|_C\} = q_1 < 1.$$

Следовательно, в уравнении (8) имеем $\|G^{-1}T\|_{W_2^1 \to W_2^1} \leqslant q_1 < 1$.

Поскольку пространство W_2^1 является полным линейным нормированным, то в силу последних неравенств можно применить малую теорему Банаха [1], тогда оператор $K : W_2^1 \to W_2^1$ непрерывно обратим и

$$\|K^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|G^{-1}T\|_{W_2^1 \to W_2^1}} \leqslant \frac{1}{1 - q_1} < 1.$$

В силу обратимости операторов $G : W_2^1 \to L_2$ и $K : W_2^1 \to W_2^1$, оператор $A = GK : W_2^1 \to L_2$ также непрерывно обратим и

$$\|A^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} = \|K^{-1}G^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} \leqslant \|K^{-1}\|_{W_2^1 \to W_2^1} \cdot \|G^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} \leqslant \frac{1}{1 - q_1} < \infty.$$

Таким образом, уравнение (1) однозначно разрешимо при любых $f \in L_2$, а его решение $\varphi^* = A^{-1}f \in W_2^1$ и

$$\|\varphi^*\|_{W_2^1} = \|A^{-1}f\|_{W_2^1} \leqslant \|A^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} \cdot \|f\| \leqslant \frac{\|f\|_{L_2}}{1 - q_1}.$$

Теорема 2. *Пусть* $a(t) \in L_2[-1,1], b(t) \in C$,

$$q_2 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \|b\|_C \cdot e^{\|a\|_{L_2}} < 1.$$

Тогда задача (1)–(2) имеет единственное решение $\varphi^* \in W_2^1$ *при любой правой части* $f(t) \in L_2$ *и*

$$\|\varphi\|_{W_2^1} \leqslant \|f\|_{L_2} \cdot \frac{e^{\|a\|_{L_2}}}{1-q_2}.$$

Получение результатов, аналогичных теоремам 1 и 2, в паре пространств (C^1, C) требует выполнения более жёстких условий относительно коэффициентов уравнения (1). Это видно хотя бы из следующих двух теорем:

Теорема 3. *Пусть* $a(t) \in C$ *и* $b(t) \in Lip\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$, *а* $b(+1) = 0$. *Если*

$$q_3 = 2\left\{\|a\|_C + \frac{1}{\pi}\left(\|b\|_C + \|b_1\|_C\right)\right\} < 1,$$

где $b_1(t) = b(t)\ln(1-t)$, *то задача (1)–(2) имеет единственное решение* $\varphi^* \in C^1$ *при любой правой части* $f(t) \in C$ *и*

$$\|\varphi^*\|_{C^1} \leqslant \frac{\|f\|_C}{1-q_3}.$$

Теорема 4. *Пусть* $a(t) \in C$ *и* $b(t) \in Lip\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$, *а* $b(+1) = 0$. *Если*

$$q_4 = \frac{2}{\pi}(\|b\|_C + \|b_1\|_C)e^{\|a\|_C} < 1,$$

то задача (1)–(2) имеет единственное решение $\varphi^* \in C^1$ *при любой правой части* $f(t) \in C$, *причём*

$$\|\varphi^*\|_C \leqslant \|f\|_C \cdot \frac{e^{\|a\|_C}}{1-q_4}.$$

Доказательство. Задача (1)–(2) эквивалентна следующему линейному операторному уравнению

$$z + TG^{-1}z = f(z, f \in C), \tag{12}$$

где $z(t) = \varphi'(t) = G\varphi, \quad T\varphi = a\varphi + bS\varphi$.

Тогда уравнение (12) представимо в виде

$$z + TG^{-1}z = z + aG^{-1}z + bSG^{-1}z = f(z, f \in C).$$

Полагая

$$Uz \equiv z + aG^{-1}z = z + a\int_{-1}^{1} z(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad Vz \equiv bSG^{-1}z,$$

имеем $Uz + Vz = f(z, f \in C)$.

Используя леммы 1 и 2 и условие теоремы, для любых $t \in [-1,1]$ получаем

$$|V(z;t)| = |b(t)S(z;t)| \leqslant \frac{|z(+1)| \cdot \|b_1(t)\|_C}{\pi} + \\ + \frac{\|b(t)\|_C}{\pi} \cdot \|z'\|_C \int_{-1}^{1} |\ln|\tau - t||\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{2\|z'\|_C}{\pi}\left[\|b_1\|_C + \|b\|_C\right].$$

Оператор U непрерывно обратим как оператор Вольтерра второго рода в пространстве C и для обратного оператора справедлива оценка $\|U^{-1}\|_{C\to C} \leqslant e^{2\|a\|_C}$. Поэтому уравнение (12) эквивалентно следующему

$$Bz \equiv z + U^{-1}Vz = U^{-1}f(z, U^{-1}f \in C). \tag{13}$$

Оценим $\|U^{-1}V\| \leqslant \|U^{-1}\|_{C\to C} \cdot \|V\|_C \leqslant q_4 < 1$. В силу теоремы Банаха о сжатых отображениях, оператор $B : C \to C$ имеет ограниченный обратный и

$$\|B^{-1}\|_{C\to C} \leqslant \frac{1}{1-q_4} < \infty.$$

Таким образом, уравнение (13) однозначно разрешимо при любых $f \in C$ и его решение удовлетворяет неравенству:

$$\|z^*\|_C = \|B^{-1}U^{-1}f\| \leqslant \frac{e^{2\|a\|_c} \cdot \|f\|_C}{1-q_4}.$$

Поэтому задача (1)–(2) имеет единственное решение $\varphi^*(t) = \int\limits_{-1}^{1} z^*(\tau)\mathrm{d}\tau = G^{-1}(z^*; t)$ и оно имеет первую непрерывную производную на $t \in [-1, 1]$. □

Поскольку значительная часть доказательств теорем 1 и 4 аналогична соответствующим доказательствам теорем 2 и 3, то мы ограничимся, в основном, отличительными моментами. Приведём доказательства двух теорем: теоремы 1 и 4.

Теорема 5. *Пусть вещественные функции* $a(t)$ *и* $b(t)$ *таковы, что* $|a(t)| \geqslant \alpha = \text{const} > 0$ *и* $b(t) = \text{const}$. *Тогда задача (1)–(2) для любых* $f \in L_2$ *имеет единственное решение* $\varphi^* \in W_2^1$.

Доказательство. Представим задачу (1)–(2) в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения $A\varphi = f(\varphi, f \in L_2)$; здесь оператор $A : L_2 \to L_2$ является неограниченным. Поэтому за область его определения возьмём множество всех непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (2), т.е. $D(A) = \overset{0}{C}{}^1$. Без ограничения общности, считаем, что $a(t) \geqslant \alpha > 0$. Случай $a(t) \leqslant -\alpha < 0$ рассматривается аналогично. Тогда для любых $\varphi \in D(A)$ находим

$$(A\varphi, \varphi) = (\varphi', \varphi) + (a\varphi, \varphi) + b(S\varphi, \varphi),$$

где

$$(\varphi', \varphi) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)\mathrm{d}\varphi(t) = \left.\frac{\varphi^2(t)}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{\varphi^2(+1)}{2} \geqslant 0;$$

$$(a\varphi, \varphi) = \int\limits_{-1}^{1} a(t)\varphi(t) \cdot \varphi(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} a(t)\varphi^2(t)\mathrm{d}t \geqslant \alpha \int\limits_{-1}^{1} \varphi^2(t)\mathrm{d}t = \alpha\|\varphi\|^2.$$

Известно, что

$$(S\varphi, \varphi) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)S(\varphi; t)\mathrm{d}t = 0$$

для любой функции φ из L_2 и тем более из $D(A)$.

Итак, для любой функции $\varphi \in D(A) \subset L_2$ выполняется равенство

$$(A\varphi, \varphi) \geqslant \alpha \|\varphi\|^2_{L_2}.$$

Отсюда находим $\alpha\|\varphi\|^2 \leqslant (A\varphi,\varphi) \leqslant \|A\varphi\| \cdot \|\varphi\|$, $\varphi \in D(A)$. Поэтому $\|A\varphi\| \geqslant \alpha\|\varphi\|$, $\varphi \in D(A)$. Это условие, как известно [1], является необходимым и достаточным для существования левого ограниченного обратного оператора A_l^{-1} и $\|A_l^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha} < \infty$.

Отсюда следует, что однородная задача, соответствующая (1)–(2), имеет только нулевое решение, а тогда неоднородная задача имеет единственное решение $\varphi^* \in L_2$ при любой правой части $f \in L_2$. Отсюда и из тождества ${\varphi^*}'(t) \equiv f(t) - a(t)\varphi^*(t) - b(t)S(\varphi^*;t)$, где $a(t) \in C$, с учётом свойств сингулярного оператора $S : L_2 \to L_2$ и условия теоремы находим ${\varphi^*}'(t) \in L_2$, следовательно, $\varphi^*(t) \in W_2^1$. Теорема доказана. □

Теорема 5 допускает следующее обобщение

Теорема 6. *Пусть вещественные функции $a(t), h(t,\tau), f(t)$ такие, что $|a(t)| \geqslant \alpha$ и $h(t,\tau) = h(\tau,t) \in Lip\alpha$ (по каждой из переменных). Тогда СИДУ*

$$A\varphi \equiv \varphi'(t) + a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau)\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = f(t), \quad -1 \leqslant t < 1,$$

при начальном условии (2) имеет единственное решение $\varphi^* \in W_2^1$ при любой правой части $f \in L_2$.

4. Об устойчивости решения

Уравнению (4) поставим в соответствие уравнение вида

$$A_\varepsilon\varphi \equiv G\varphi + T_\varepsilon\varphi = f_\varepsilon(\varphi \in W_2^1, f_\varepsilon \in L_2), \tag{14}$$

где $T_\varepsilon = a_\varepsilon\varphi + b_\varepsilon S\varphi$ и f_ε — некоторые аппроксимации оператора $T = a\varphi + bS\varphi : W_2^1 \to L_2$ и соответственно правой части $f \in L_2$, причём $\varepsilon \geqslant 0 (T_0 \equiv T, f_0 \equiv f, A_0 \equiv A)$.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть $a(t), f(t) \in L_2, b(t) \in C$; и пусть выполнены условия:*

$$\|a - a_\varepsilon\|_{L_2} \leqslant \varepsilon; \quad \|b - b_\varepsilon\|_C \leqslant \varepsilon; \quad \|f - f_\varepsilon\|_{L_2} \leqslant \varepsilon.$$

Если существует непрерывный оператор $A^{-1} : L_2 \to W_2^1$, то найдётся такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (14), (2) имеет единственное решение $\varphi_\varepsilon^* \in W_2^1$. При $\varepsilon \to 0$ приближенное решение $\varphi^*_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon \to \varphi^*$ в W_2^1 со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi^*_\varepsilon\|_{W_2^1} = O(\varepsilon).$$

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in W_2^1$ имеем

$$\|A\varphi - A_\varepsilon\varphi\|_{L_2} = \|T\varphi - T_\varepsilon\varphi\|_{L_2} = \|(a - a_\varepsilon)\varphi + (b - b_\varepsilon)S\varphi\|_{L_2} \leqslant \|(a - a_\varepsilon)\varphi\|_{L_2} +$$
$$+ \|(b - b_\varepsilon)S\varphi\|_{L_2} \leqslant \|a - a_\varepsilon\|_{L_2} \cdot \|\varphi\|_C + \|b - b_\varepsilon\|_C \cdot \|S\varphi\|_{L_2} \leqslant \|a - a_\varepsilon\|_{L_2} \cdot \sqrt{2} \cdot \|\varphi\|_{W_2^1} +$$
$$+ \|b - b_\varepsilon\|_C \cdot \|\varphi\|_{L_2} \leqslant \varepsilon\sqrt{2} \cdot \|\varphi\|_{W_2^1} + \varepsilon\sqrt{2} \cdot \|\varphi\|_{W_2^1} = 2\sqrt{2}\varepsilon\|\varphi\|_{W_2^1}.$$

Таким образом, для всех $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого, выполнено неравенство $q_\varepsilon \equiv 2\sqrt{2}\varepsilon\|A^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} < 1$. Тогда (см., например, [1]) следует, что существует оператор $A_\varepsilon^{-1} : L_2 \to W_2^1$ и $\|A_\varepsilon^{-1}\| \leqslant \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-q_\varepsilon}$. Отсюда, поступая также, как и при доказательстве теоремы 1 гл. 1 книги [6], находим $\|\varphi^* - \varphi_\varepsilon^*\| \leqslant \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-q_\varepsilon}\left[\|f - f_\varepsilon\|_{L_2} + q_\varepsilon\|f\|_{L_2}\right] = O(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. □

Заметим, что на практике в качестве функций $a_\varepsilon(t), b_\varepsilon(t), f_\varepsilon(t)$ используются полиномы и (или) сплайны, обладающие определёнными аппроксимирующими свойствами, зависящими от структурных свойств исходных функций $a(t), b(t), f(t)$.

Литература

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматгиз, 199. — 684 с. [*Kantorovich L. V., Akilov G. P.* Funkcionaljnihyj analiz v normirovannihkh prostranstvakh. — M.: Fizmatgiz, 199. — 684 s.]
2. *Михлин С. Г.* Сингулярные интегральные уравнения. — Наука, 1948. — 29 с. [*Mikhlin S. G.* Singulyarnihe integraljnihe uravneniya. — Nauka, 1948. — 29 s.]
3. *Самойлова Э. Н.* Методы решений сингулярных интегродифференциальных уравнений на разомкнутых контурах. — Казань, 2004. — 114 с. [*Samoyjlova Eh. N.* Metodih resheniyj singulyarnihkh integrodifferencialjnihkh uravneniyj na razomknutihkh konturakh. — Kazanj, 2004. — 114 s.]
4. *Гахов Ф. Д.* Кевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 68 с. [*Gakhov F. D.* Kevihe zadachi. — M.: Nauka, 1977. — 68 s.]
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М., 1968. — 512 с. [*Muskhelishvili N. I.* Singulyarnihe integraljnihe uravneniya. — M., 1968. — 512 s.]
6. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. — Казань: КГУ, 1980. — 232 с. [*Gabdulkhaev B. G.* Optimaljnihe approksimacii resheniyj lineyjnihkh zadach. — Kazanj: KGU, 1980. — 232 s.]

UDC 517.968:519.6

On Existence and Uniqueness of a Solution to a Singular Integrodifferential Equation

E. N. Zamega

Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho–Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia

We presented sufficient conditions of existence and uniqueness of solutions of the singular integrodifferential equation of first order in various couples of function spaces, giving corresponding motivation. The rate of convergence for the approximate solution depending on structural properties is also established.

Key words and phrases: singular integrodifferential equation, functional spaces, theorems of existence and uniqueness, stability of the solution.