УДК 539.52

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ, ОПОРНЫХ МОМЕНТОВ И ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

Ю.К. Басов[1], И.А. Монахов[2]

[1]Кафедра строительных конструкций и сооружений
Инженерный факультет
Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

[2]Кафедра строительных конструкций
Строительный факультет
Московский государственный открытый университет
ул. Павла Корчагина, 22, Москва, Россия, 129626

Разработана методика решения задач о больших прогибах балок из идеального жесткопластического материала, с различными видами закрепления, при действии несимметрично распределенных нагрузок с учетом предварительного растяжения-сжатия. Разработанная методика применена для исследования напряженно-деформированного состояния однопролетных балок, а также для вычисления прогиба балок с учетом геометрической нелинейности.

Ключевые слова: балка, нелинейность, аналитическое.

Рассматривается балка прямоугольного поперечного сечения с защемленными опорами, нагруженная локальной равномерно распределенной нагрузкой при различных участках загрузки и изгибающими моментами на опорах. Балка предварительно сжата или растянута продольной силой N_1 (рис. 1).

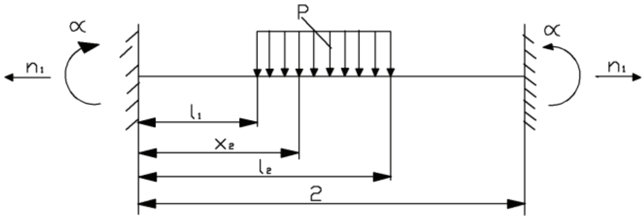

Рис. 1

Уравнения равновесия балки при больших прогибах в безразмерной форме имеют вид

$$\frac{d^2m}{dx^2}+\left(n\pm n_1\right)\frac{d^2w}{dx^2}+p=0,\quad \frac{dn}{dx}=0, \tag{1}$$

где $x=\frac{\overline{x}}{\overline{l}}$, $w=\frac{2\overline{w}}{h}$, $p=\frac{\overline{p}l^2}{\delta_s bh^2}$, $m=\frac{M}{\delta_s bh^2}$, $n=\frac{N}{\delta_s bh}$; N и M — внутренние нормальная сила и изгибающий момент; $\overline{p}$ — поперечная равномерно распределенная нагрузка; $\overline{w}$ —

прогиб; $\bar{x}$ — продольная координата (начало координат на левой опоре); $2h$ — высота поперечного сечения; b — ширина поперечного сечения; $2\bar{l}$ — пролет балки; δ_s — предел текучести материала.

Если N_1 задано, то усилие N является следствием действия $\bar{p}$ при имеющихся прогибах. Черта над буквами означает размерность величин.

Нагрузка приложена на участке $l_1 \le x \le l_2$, где $l_1 = \dfrac{\bar{l}_1}{l}$, $l_2 = \dfrac{\bar{l}_2}{l}$, $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ — начало и конец участка загрузки (см. рис. 1).

Деформирование разбивается на два этапа: при малых прогибах и при больших прогибах.

При малых прогибах (равных нулю) образуется три пластических сечения: при $x = x_2$ и на опорах. В сечении $x = x_2$ момент равен $m = 1 - n_1^2$, на опорах $m = 1 - n_1^2 \pm \alpha$, где α — значение опорного момента (знаки «+» и «–» соответствуют положительным и отрицательным значениям). Поскольку скорость изменения кривизны равна нулю, то скорости прогибов в зонах $0 \le x \le x_2$ и $x_2 \le x \le 2$ равны

$$\dot{w} = \left\{\frac{w_0}{1-x_2}\right\}^{\cdot}(2-x) \text{ при } x \ge x_2,\ \dot{w} = \left\{\frac{w_0}{1-x_2}\right\}^{\cdot} x \text{ при } x \le x_2,$$

где w_0 — прогиб при $x = x_2$, точки означают дифференцирование по времени, за которое принято p. В этом случае w = 0, $n = 0$.

Из уравнения равновесия (1) следует выражение m по зонам:

$$m = \left(-pl_1 + \frac{pl_1^2}{4} + pl_2 - \frac{pl_2^2}{4}\right)x + \left(-1 + n_1^2 \pm \alpha\right),\ (0 \le x \le l_1)$$

$$m = -\frac{px_2^2}{2} + \left(-\frac{pl_2^2}{4} + \frac{pl_1^2}{4} + pl_2\right)x + \left(-1 + n_1^2 \pm \alpha\right) - \frac{pl_1^2}{4},\ (l_1 \le x \le l_2)$$

$$m = \left(-pl_1 + pl_2 - \frac{pl_2^2}{4} + \frac{pl_1^2}{4}\right)x + \left(-1 + n_1^2 \pm \alpha\right),\ (l_2 \le x \le 2).$$

Из условия пластичности $m\Big|_{x=x_2} = 1 - n_1^2$ и условия $\dfrac{dm}{dx}\Big|_{x=x_2} = 0$ следует, что

$$x_2 = l_2 + \frac{1}{4}\left(l_1^2 - l_2^2\right), \quad p = \frac{2\left(1-n_1^2\right) \pm \alpha}{\left(l_2 - \frac{l_2^2}{4} + \frac{l_1^2}{4}\right)\frac{1}{2} - \frac{l_1^2}{4}}. \tag{2}$$

При значениях p больших, чем согласно (2), в окрестности $x = x_2$ образуется пластическая зона $x_1 \le x \le x_3$ и возникает второй этап деформирования балки, при этом прогибы отличны от нуля, а $n = \text{const} \ne 0$. С учетом предварительного растяжения-сжатия внутренняя продольная сила равна $n \pm n_1$, где знак «+» соответствует растяжению, а «–» — сжатию. Существуют ограничения: $n \pm n_1 \le 1$, $n \le 1 \pm n_1$, $|n_1| \le 1$.

В пластической зоне $x_1 \le x \le x_3$ условие пластичности имеет вид:

$$m = 1 - (n \pm n_1)^2,$$

при этом поперечная сила равна 0, т.е. $\dfrac{dm}{dx} = 0$, так как в этой зоне $m = \text{const}$.

Из уравнения (1) в этой зоне прогибы равны

$$w = w_0 - \frac{p}{2(n \pm n_1)}(x - x_2)^2, \qquad (3)$$

а скорости прогибов равны

$$\dot{w} = \dot{w}_0 - \left(\frac{p}{2(n \pm n_1)}\right)^{\cdot}.$$

Зоны $0 \le x \le x_1$ и $x_3 \le x \le 2$ жесткие, откуда распределение прогибов в этих зонах равно

$$w = w_1 \frac{x}{x_1}, \qquad w = w_3 \frac{2 - x}{2 - x_3}, \qquad (4)$$

где w_1 *и* w_3 — прогибы при $x = x_1$ и $x = x_3$.

Скорости прогибов в этих зонах равны

$$\dot{w} = \left\{\frac{w_1}{x_1}\right\}^{\cdot} \text{ при } 0 \le x \le x_1, \; \dot{w} = \left\{\frac{w_3}{2 - x_3}\right\}^{\cdot} (2 - x) \text{ при } x_3 \le x \le 2. \qquad (5)$$

При $x = x_1$ и $x = x_3$ имеют место слабые разрывы $[\dot{w}_x]$, $[\dot{w}_{xx}]$, $[\ddot{w}]$, где скобки означают разрывы, нижние индексы означают дифференцирование по x.

Учитывая условия разрывов, можно получить

$$w_1 = \frac{p x_1}{n \pm n_1}(x_2 - x_1), \qquad (6)$$

и при $x = x_3$

$$w_3 = \frac{p}{n \pm n_1}(x_3 - x_2)(2 - x_3). \qquad (7)$$

Откуда следуют два равносильных выражения

$$w_0 = \frac{p}{2(n \pm n_1)}\left(x_2^2 - x_1^2\right), \qquad (8)$$

$$w_0 = \frac{p}{2(n \pm n_1)}\left(4x_3 - 4x_2 - x_3^2 + x_2^2\right).$$

Тогда можно получить выражения для изгибающих моментов в зонах $0 \le x \le l_1$, $l_1 \le x \le x_1$, $x_3 \le x \le l_2$, $l_2 \le x \le 2$ согласно (1):

$$m = 1-(n \pm n_1)^2 - \frac{p}{2}\left[2(l_1 - x_1)x + x_1^2 - l_1^2\right], \qquad (0 \le x \le l_1)$$

$$m = 1-(n \pm n_1)^2 - \frac{p}{2}(x - x_1)^2, \qquad (l_1 \le x \le x_1)$$

$$m = 1-(n \pm n_1)^2 - \frac{p}{2}(x - x_3)^2, \qquad (x_3 \le x \le l_2)$$

$$m = 1-(n \pm n_1)^2 - \frac{p}{2}\left\{2x(l_2 - x_3) - l_2^2 + x_3^2\right\}, \qquad (l_2 \le x \le 2)$$

Поскольку $m = -1 + (n \pm n_1)^2 \pm \alpha$ при $x = 0$ и $x = 2$, то

$$p = \frac{2\left\{2\left[1-(n \pm n_1)^2\right] \mp \alpha\right\}}{x_1^2 - l_1^2} = \frac{2\left\{2\left[1-(n \pm n_1)^2\right] \mp \alpha\right\}}{4(l_2 - x_3) + x_3^2 - l_2^2}. \tag{9}$$

Далее определяется значение n в зависимости от p.

Определим значение n из условия максимума p согласно (9) при втором условии (8). Это приводит к задаче об условном максимуме функции p, которая приводится к задаче о безусловном максимуме функции Φ с помощью множителя Лагранжа.

Безусловная функция согласно (9) и (8) имеет вид

$$\Phi = \frac{2\left\{2\left[1-(n \pm n_1)^2\right] \mp \alpha\right\}}{\left(4l_2 - 4x_3 + x_3^2 - l_2^2\right)} + \\ + \lambda \frac{\left\{2\left[1-(n \pm n_1)^2\right] \mp \alpha\right\}\left(x_2^2 - x_2^3 + 4x_3 - 4x_2\right)}{\left(4l_2 - 4x_3 + x_3^2 - l_2^2\right)(n \pm n_1)} - \lambda w_0, \tag{10}$$

где λ — множитель Лагранжа.

Дифференцируя (10) по x_3 и n и приравнивая результаты к нулю, можно получить:

$$\lambda = \frac{2(n \pm n_1)}{x_2^2 - l_1^2}, \quad n = \mp n_1 + \sqrt{\frac{(2 \mp \alpha)\left(x_2^2 - x_3^2 + 4x_3 - 4x_2\right)}{2\left(x_2^2 - 2l_1^2 + x_3^2 - 4x_3 + 4x_2\right)}}. \tag{11}$$

Таким образом, в виде (8), (9), (11) получено аналитическое решение задачи о деформировании жесткопластической балки с защемленными опорами под действием локальных распределенных нагрузок, краевых моментов и продольной силы с учетом больших прогибов. На рис. 2—6 изображены графики зависимости прогиба w_0 от нагрузки p для различных значений l_1, l_2, α.

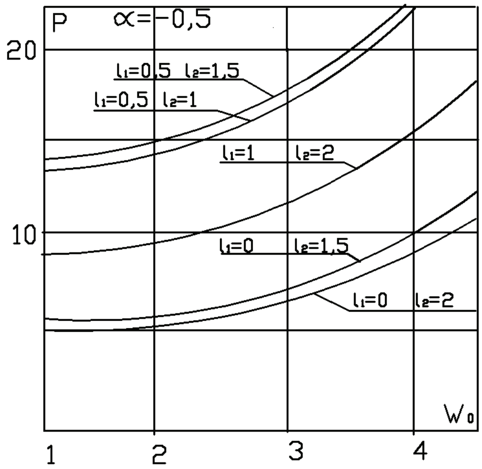

Рис. 2

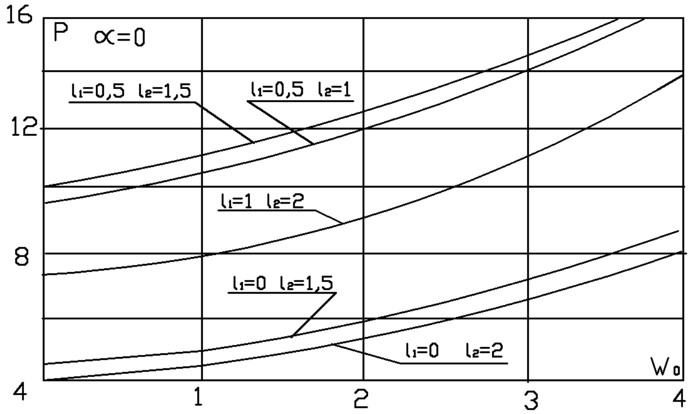

Рис. 3

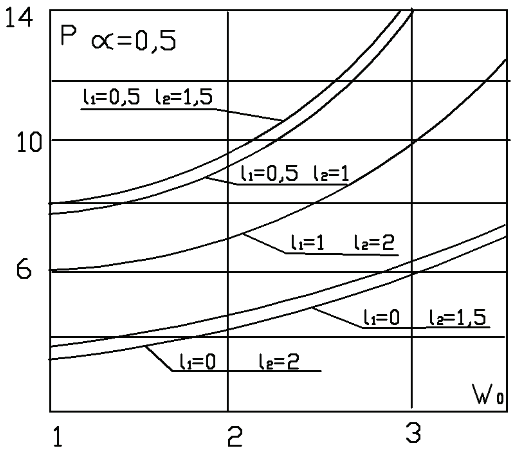

Рис. 4

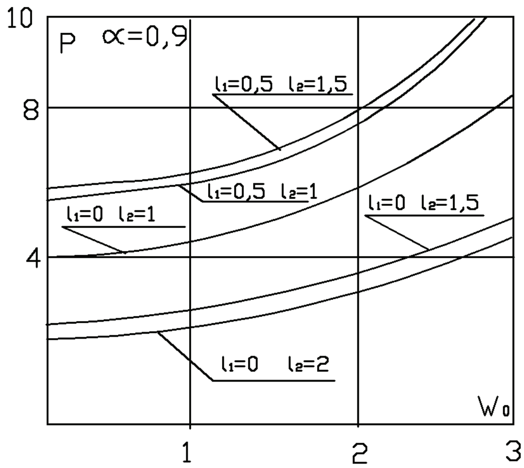

Рис. 5

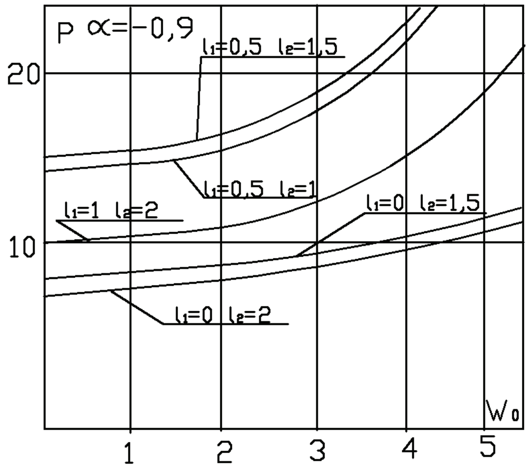

Рис. 6

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ерхов М.И., Монахов А.И.* Большие прогибы предварительно напряженной жесткопластической балки с шарнирными опорами при равномерно распределенной нагрузке и краевых моментах // Вестник отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук. — 1999. — Вып. 2. — С. 151—154.

THE LARGE DEFLECTIONS OF THE PREVIOUSLY INTENSE IDEAL PLASTIC BEAMS WITH THE REGIONAL MOMENTS

U.K. Basov[1], I.A.Monakhov[2]

[1]Department of Building Structures and Facilities
Engineering Faculty
People's Friendship University of Russia
Ordzhonikidze str., 3, Moskow, Russia, 115419

[2]Department of Building Structures
Faculty of Civil Engineering
Moscow State Open University
Pavla Korchagina str., 22, Moskow, Russia, 129626

In the work up the technique of the decision of problems about the large deflections of beams from ideal hard-plastic material, with various kinds of fastening, for want of action of the asymmetrically distributed loads with allowance for of preliminary stretching-compression is developed. The developed technique is applied for research of the strained-deformed condition of beams, and also for calculation of a deflection of beams with allowance for of geometrical nonlinearity.

Key words: beam, analytic, nonlinearity.